Masarykova univerzita Přírodovědecká fakulta

ÚLOHY Z ASTROFYZIKY

Vladimír Štefl, Daniela Korčáková, Jiří Krtička

Brno 2010

Předmluva

Elektronická podoba upravené sbírky úloh z astrofyziky vznikla díky podpoře grantu FRVŠ 796/2002/F4.

Elektronická podoba rozšířeného druhého vydání sbírky úloh z astrofyziky vznikla díky podpoře grantu FRVŠ 8/2010/F4.

Bez řešení úloh nelze astrofyziku studovat a porozumět jí. K tomu má napomoci předkládaná sbírka, která je určena především vysokoškolským studentům. Sbírka úloh doplňuje v širším slova smyslu některé kapitoly vysokoškolské učebnice Vanýsek, V.: Základy astronomie a astrofyziky, Academia, Praha 1980.

Současná vědecká astrofyzika vychází důsledně z fyziky, což se odráží v obsahu a pojetí úloh zařazených do sbírky. Jejich studium a osvojení umožňuje hlubší pochopení fyzikální podstaty stavby kosmických těles a jevů na nich probíhajících. Řešení úloh se proto logicky opírá o znalosti z experimentální a teoretické fyziky, v naší sbírce na úrovni učitelského studia. Jako optimální postup doporučujeme řešit nejprve úlohy samostatně, na základě vlastních vědomostí a dovedností, teprve následně je vhodné se přesvědčit o správnosti postupu i dosažených numerických hodnot. Stručně naznačené řešení jistě poslouží při sebevzdělávání studentů. Některé náročnější úlohy vyžadují samostatný přístup, slouží k prohloubení znalostí a jsou určeny i pro studenty odborného magisterského astrofyzikálního studia.

Sbírka obsahuje na 350 úloh různého stupně obtížnosti. Přibližně polovina z nich byla převzata z literatury, především z [2], [3], [4], [6], [10], [11], [12], [15], [16], [18], [19], [27], [28]. druhá polovina je však původních. První úlohovou část kapitoly 1–13 připravil Vladimír Štefl, kapitolu 14 Jiří Krtička.

Autoři budou vděčni všem uživatelům sbírky za připomínky. Náměty a připomínky lze zaslat na adresu `stefl@astro.sci. muni.cz`, `krticka@physics.muni.cz`.

S ohledem na omezený rozsah sbírky byl výběr témat úloh zvolen tak, aby doplňoval osvědčenou vysokoškolskou učebnici Široký, J., Široká, M.: Základy astronomie v příkladech, která však vyšla naposledy v SPN, Praha 1973.

Autoři děkují oběma recenzentům, RNDr. Pavlu Kotrčovi, CSc., z AsÚ AV ČR v Ondřejově a doc. RNDr. Miroslavě Široké, CSc., z Olomouce, kteří svými připomínkami podstatně přispěli ke zkvalitnění úrovně i obsahu sbírky v prvním vydání.

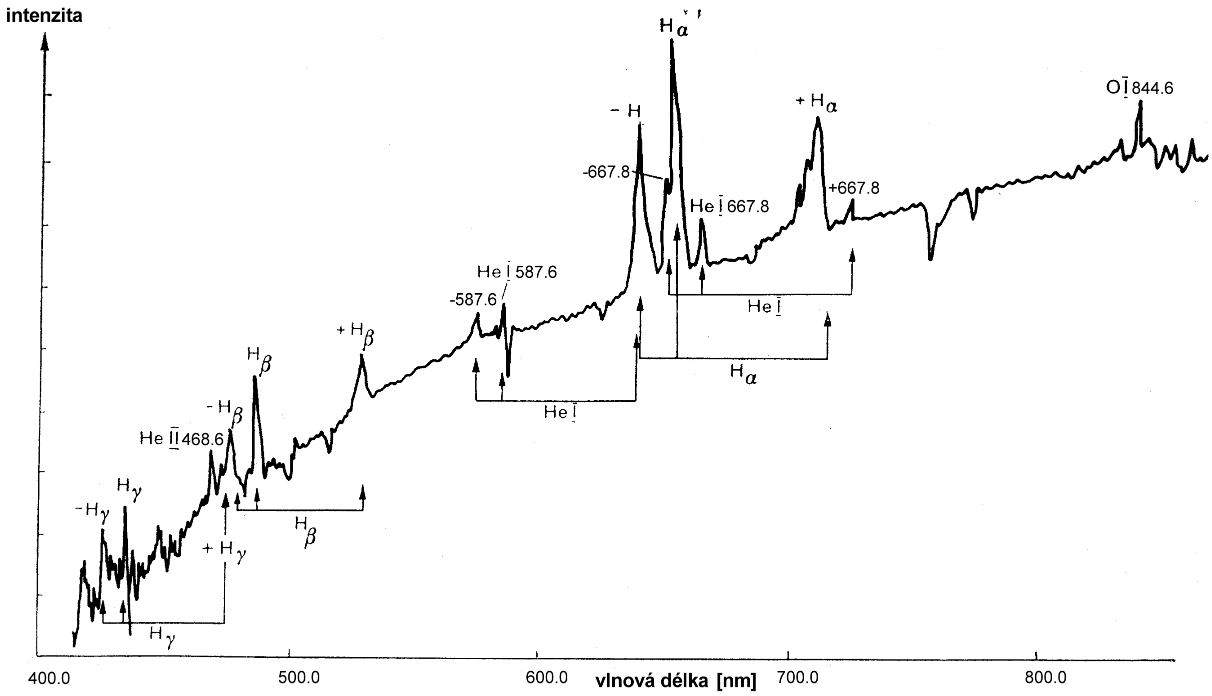
V druhém vydání byly doplněny úlohy nových kapitol *Astrofyzikální metody, Sluneční soustava, Kosmická mechanika sluneční soustavy*, a *Proměnné hvězdy* a podstatně rozšířeny *Počítačové úlohy*. Jejich zpracování provedli Vladimír Štefl a Jiří Krtička.

Brno, prosinec 2010 — Vladimír Štefl, Daniela Korčáková, Jiří Krtička

A. S. Eddington (1882–1944)

„Není nic jednoduššího, než jsou hvězdy"

Obsah


intenzita
Hα
O I 844.6
− H
+ Hα
-667.8
+667.8
He I 667.8
He I 587.6
-587.6
He I
Hα
+ Hβ
Hβ
- Hβ
He II 468.6
He I
Hγ
-Hγ
+ Hγ
Hβ
Hγ
400.0
500.0
600.0
vlnová délka [nm]
700.0
800.0

1 Astrofyzikální metody

Úloha 1.1 Odvoďte teoretický vztah pro rozlišovací schopnost dalekohledu $\sin\Theta = 1{,}22\lambda/D$ respektive $\Theta = 1{,}22\lambda/D$.

Řešení: Vycházíme ze vztahu pro difrakci na kruhovém otvoru, Besselova funkce I. řádu má nulovou hodnotu pro $x = 3{,}84$, proto platí $\frac{1}{2}kD\sin\Theta = 3{,}84$. Po dosazení za $k = 2\pi/\lambda$ dostáváme $\sin\Theta = \frac{3{,}84}{\pi}\frac{\lambda}{D}$ a odtud pro malé úhly při úpravě $\sin\Theta = 1{,}22\lambda/D$, tedy $\Theta = 1{,}22\lambda/D$.

Úloha 1.2 Dokažte, že lidské oko bez vad má teoretickou rozlišovací schopnost asi $1'$.

Řešení: Předpokládáme $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$, $D \cong 2\,\mathrm{mm}$. $\Theta = 1{,}22\lambda/D = 1{,}22\frac{550\cdot 10^{-9}}{2\cdot 10^{-3}} = 3{,}4\cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad} = 69'' \cong 1'$. Reálná hodnota je zhruba $2'$.

Úloha 1.3 Hubbleův kosmický dalekohled obíhající nad Zemí ve výšce 600 km používá primární zrcadlo o průměru $D = 2{,}4\,\mathrm{m}$. Určete jeho rozlišovací schopnost na vlnové délce čáry L_α, $\lambda = 121{,}6\,\mathrm{nm}$.

Řešení: $\Theta = 1{,}22\lambda/D = 6{,}2\cdot 10^{-8}\,\mathrm{rad} = 0{,}0127''$. Pod tímto úhlem bychom pozorovali minci o nominální hodnotě 20 Kč ze vzdálenosti 400 km.

Úloha 1.4 Úhel mezi dvěma hvězdami je 10^{-6} rad. Lze tyto hvězdy rozlišit pomocí dalekohledu s průměrem primárního zrcadla 2,54 m? Přepokládáme pozorování na vlnové délce $\lambda = 510\,\mathrm{nm}$.

Řešení: $\Theta = 1{,}22\lambda/D = 2{,}4\cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad}$. Úhlová vzdálenost mezi hvězdami převyšuje 4krát limitní hodnotu, použitým dalekohledem lze obě hvězdy rozlišit.

Úloha 1.5 Předpokládejte, že hvězdy z předcházející úlohy vyzařují rádiové vlny na frekvenci 400 MHz. Můžeme obě hvězdy rozlišit při detekci rádiového záření pomocí rádiového teleskopu v Arecibu, jehož průměr je 305 m?

Řešení: Vlnová délka je $\lambda = c/f = 0{,}75\,\mathrm{m}$. Dosazením do $\Theta = 1{,}22\lambda/D = 3\cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad}$. K rozlišení obou hvězd na této vlnové délce bychom potřebovali 3 000krát větší rozlišení. Toho lze dosáhnout sdružením rádiových teleskopů na vzdálenosti řádově tisíce kilometrů.

Úloha 1.6 Určete rozlišovací schopnost dalekohledu o průměru $D = 1{,}3\,\mathrm{m}$ na vlnové délce $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$. Jaký by musel mít poloměr rádiový teleskop pracující na vlnové délce $\lambda = 4\,\mathrm{m}$ se stejnou rozlišovací schopností?

Řešení: Dosadíme do vztahu $\Theta = 1{,}22\lambda/D = 4{,}7\cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad} \cong 1''$. Teoreticky uvažovaný rádiový teleskop se stejnou rozlišovací schopností by musel mít průměr $D = 10^7\,\mathrm{m}$, což je technicky nemožné. Proto jsou používány interferometrické soustavy rádiových teleskopů.

Úloha 1.7 Jak velký bude obraz Marsu při opozici, jestliže pozorujeme planetu dalekohledem o průměru 62 cm s ohniskovou vzdáleností $f = 2{,}8\,\mathrm{m}$? Průměr Marsu je 6 794 km, jeho vzdálenost je 0,37 AU = 55 mil. km.

Řešení: Pozorovaný úhlový průměr je $\Theta = \frac{d}{r} = \frac{6794}{55\cdot10^6} = 1{,}2\cdot10^{-4}\,\mathrm{rad} \cong 25''$. Při ohniskové vzdálenost $f = 2{,}8\,\mathrm{m}$ je obraz velký $\Theta f = 0{,}3\,\mathrm{mm}$.

Úloha 1.8 Hvězda α Centauri A má roční paralaxu $\pi = 0{,}742''$ a průměr $1{,}7\cdot10^9\,\mathrm{m}$. Můžeme rozlišit v Hubbleově kosmickém dalekohledu její kotouček při pozorování na vlnové délce $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$?

Řešení: Platí $\Theta = d/r = 4\cdot10^{-8}\,\mathrm{rad} = 0{,}0086''$. Hubbleovým kosmickém dalekohledem nelze pozorovat kotouček hvězdy, neboť jeho rozlišovací schopnost je $\Theta = 1{,}22\lambda/D = 2{,}8\cdot10^{-7}\,\mathrm{rad}$.

Úloha 1.9 Stanovte úhlové rozlišení mezi Plutem a Charonem při jejich pozorování v opozici ze Země v perihéliu dráhy s excentricitou $e = 0{,}25$. Velikost velké poloosy dráhy Pluta je 39,5 AU, velikost velké poloosy dráhy Charona je $d = 19\,600\,\mathrm{km}$. Jaký průměr dalekohledu je nezbytný k úhlovému rozlišení obou těles na vlnové délce $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$?

Řešení: Perihéliová vzdálenost od Slunce je $r = a(1-e) = 29{,}6\,\mathrm{AU}$, vzdálenost od Země je $28{,}6\cdot1{,}5\cdot10^{11}\,\mathrm{m} = 4{,}3\cdot10^{12}\,\mathrm{m}$. Dosadíme do vztahu $\Theta = \frac{d}{r} = \frac{19{,}6\cdot10^3\,\mathrm{km}}{28{,}6\cdot1{,}5\cdot10^8\,\mathrm{km}} = 4{,}6\cdot10^{-6}\,\mathrm{rad} = 0{,}9''$. Toto rozlišení je dosažitelné jen při velmi dobrých pozorovacích podmínkách, kvalitním seeingu. Ke stanovení průměru dalekohledu využijeme vztah $D = 1{,}22\lambda/\Theta = 0{,}13\,\mathrm{m}$.

Úloha 1.10 Nechť u hypotetické hvězdy spektrální třídy G2 V byla stanovena roční paralaxa $\pi = 0{,}004''$. Předpokládejte, že kolem ní obíhá planeta s oběžnou dobou $T = 64$ roků. Ověřte, zda lze rozlišit od sebe tělesa při sledování dalekohledem o průměru 10 m na vlnové délce $\lambda = 510\,\mathrm{nm}$.

Řešení: Vzdálenost hvězdy je $r = 1/\pi = 250\,\mathrm{pc}$. Při stejné spektrální třídě jako Slunce můžeme předpokládat obdobnou hmotnost. Dále určíme velikost velké poloosy dráhy planety $a = T^{2/3} = 16\,\mathrm{AU}$. Ze vzdálenosti 1 pc bychom pozorovali velkou poloosu dráhy 16 AU pod úhlem $16''$, tedy ze vzdálenosti 250 pc pod úhlem $0{,}06''$. Rozlišovací schopnost dalekohledu je $\Theta = 1{,}22\lambda/D = 0{,}01''$, planetu můžeme pozorovat.

Úloha 1.11 Stará kulová hvězdokupa M 13 v souhvězdí Herkula se nachází ve vzdálenosti 7,2 kpc. Její úhlový průměr je $23'$. Hustota zářivého toku detekovaná od této hvězdokupy bolometrem v horní vrstvě zemské atmosféry je $2{,}45\cdot10^{-10}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$. Určete průměr hvězdokupy v pc. Za zjednodušujícího předpokladu, že všechny hvězdy hvězdokupy mají zářivý výkon shodný se Sluncem stanovte, kolik hvězd hvězdokupa obsahuje.

Řešení: Průměr hvězdokupy je $d = \theta r = \frac{23\cdot60}{206265}\cdot7{,}2\cdot10^3 = 50\,\mathrm{pc}$. Počet hvězd tvořících hvězdokupu je $N = 4\pi r^2 F_{\mathrm{bol}}/L_\odot = 4\cdot10^5$.

Úloha 1.12 Vzdálenost kosmických těles, v našem případě hvězd, určujeme ze vztahu $r = 10^{0{,}2(m-M+5)}$. Do jaké vzdálenosti můžeme pozorovat hvězdy hlavní posloupnosti G0 V, jejichž absolutní bolometrická hvězdná velikost je 4,4 mag. Předpokládejte, že hvězdy s nejmenší jasností, které můžeme pozorovat, se vyznačují pozorovanou bolometrickou hvězdnou velikostí 16,4 mag.

Řešení: Dosazením do vztahu $r = 10^{0{,}2(m-M+5)}$ obdržíme $r = 2\,500\,\mathrm{pc} = 2{,}5\,\mathrm{kpc}$.

Úloha 1.13 CCD detektor je umístěn v ohnisku reflektoru s ohniskovou vzdáleností $f = 15\,\mathrm{m}$ a s průměrem zrcadla 8,2 m. Detektor obsahuje 500×500 pixelů, každý z nich má šířku $20\,\mu\mathrm{m}$. Jaká je úhlová velikost v arcsec oblohy, která je zobrazena na pixelu. Určete úhlovou velikost pole v arcmin celého CCD čipu.

Řešení: Pro závislost mezi velikostí obrazu objektu d v ohniskové rovině dalekohledu, ohniskovou vzdáleností f a úhlovou velikostí objektu Θ na obloze platí $d = f\Theta$, kde Θ je vyjádřené v radiánech. Dosazením obdržíme $\Theta = d/f = 1{,}3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad} = 0{,}275''\,\mathrm{pixel}^{-1}$. Pro celý čip obdržíme $500 \cdot 0{,}275'' = 137{,}5'' = 2'17''$.

Úloha 1.14 Zvažte, zda lze pomocí Hubbleova kosmického dalekohledu s primárním zrcadlem o průměru $D = 2{,}4\,\mathrm{m}$ a ohniskovou vzdáleností $f = 31\,\mathrm{m}$ vybaveného CCD detektorem 1600×1600 pixelů, jeden pixel má šířku $d = 15\,\mu\mathrm{m}$, pozorovat aktivní galaxii NGC 6240, jejíž úhlová velikost je $2'$. Určete úhlovou velikost pole připadající na jeden pixel a na celý CCD čip (prvek).

Řešení: Na jeden čip připadá $\Theta = d/f = 4{,}8 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad} = 0{,}1''$. Celkové pole detektoru je $1600 \cdot 0{,}1'' = 160'' = 2'40''$, tedy Hubbleův kosmický dalekohled můžeme k pozorování této galaxie použít.

Úloha 1.15 Obraz slabě jasné vzdálené galaxie na CCD detektoru pokrývá 50 pixelů. V průběhu pětisekundové expozice bylo na těchto pixelech zachyceno 10^4 fotoelektronů. Na sousedních 2500 pixelech detektoru vně obrazu galaxie, bylo při stejné expoziční době zachyceno 10^5 fotoelektronů. Určete poměr signál/šum. Vypočtěte potřebnou délku expozice t, jestliže budeme vyžadovat poměr signál/šum rovný 100.

Řešení: Poměr $\frac{S}{N} = \frac{C_{\mathrm{obj}}}{\left(C_{\mathrm{obj}}+2C_{\mathrm{obl}}\right)^{1/2}} = \frac{8000}{109{,}54} = 73$. Platí závislost $S/N \approx t^{1/2}$, tedy požadovaný poměr bude dosažen při expozici $t = 10\,\mathrm{s}$.

Úloha 1.16 Mřížkový spektrograf s kolimační soustavou má ohniskovou vzdálenost $f_1 = 0{,}5\,\mathrm{m}$ a dále je vybaven obrazovou čočkou o ohniskové vzdálenosti $f_2 = 0{,}2\,\mathrm{m}$. Spektrum je fokusováno na CCD detektor, jednotlivé pixely mají šířku $15\,\mu\mathrm{m}$. Světlo směřované na mřížku prochází přes štěrbinu o šířce $s = 50\,\mu\mathrm{m}$. Mřížka má 600 čar/mm, její šířka je 10 cm. Mřížka je užívána v prvním řádu k pozorování spektrální čáry o vlnové délce $\lambda = 500{,}7\,\mathrm{nm}$. Pro výsledné zachycené spektrum musí být rozlišení takové, aby alespoň dva pixely byly rozlišeny. Určete reciproční lineární disperzi $\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}x$ v Å/mm a v Å/pixel.

V extrémním případě, kdy je rozlišení spektra určováno výhradně šířkou štěrbiny, stanovte šířku lineárního rozlišovacího prvku, Δx (v μm) a spektrálního rozlišení W_λ (v Å). Je rozlišovací prvek adekvátní vzorkování pixelů v CCD?

Řešení: Reciproční lineární disperze je dána vztahem $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = \frac{d\cos\theta}{f_2 m}$. Při užití mřížky k pozorování světla o vlnové délce λ je záměrný úhel θ určen: $d\sin\theta = m\lambda \Rightarrow \sin\theta = m\lambda/d$, $\cos\theta = \left(1-\sin^2\theta\right)^{1/2} = \left[1-\left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2\right]^{1/2}$. Dosazením za $\cos\theta$ obdržíme $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = \frac{d}{f_2 m}\left[1-\left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2\right]^{1/2}$. Numerickým dosazením obdržíme $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = 80\,$Å/mm. Vyjádříme vše v jednotkách Å/pixel, šířka pixelu je $a = 15\,\mu\mathrm{m}$, což znamená, že $1\,\mathrm{mm} = 1/a$ pixelů. Reciproká lineární disperze je v Å/pixel $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d(pix)}} = a\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = 1{,}2\,$Å/pixel. Jestliže rozlišení je určováno výhradně šířkou štěrbiny, pak dostáváme $\Delta x = s' = sf_2/f_1 = 50 \cdot 20/50 = 20\,\mu\mathrm{m}$. Převedení na spektrální rozlišení v Å

realizujeme vynásobením reciproční lineární disperzí $W_\lambda = \Delta x \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = 1{,}6\,\text{Å}$. Tudíž rozlišovací prvek je $\Delta x = 20\,\mu$m, pixel má velikost $a = 15\,\mu$m. Rozlišovací prvek pokrývá méně než 2 pixely, tudíž není vhodným.

Úloha 1.17 Jaký zvolíte typ pozorovacího přístroje k detekci záření přicházejícího ze spirálních ramen Galaxie. Záření vzniká v atomech vodíku při změně orientace spinu elektronu z původně paralelní na antiparalelní vzhledem k protonu. Teoreticky propočítaný rozdíl mezi oběma energetickými hladinami je $1{,}1 \cdot 10^{-24}$ J.

Řešení: Výpočtem stanovíme vlnovou délku $\lambda = hc/E = 0{,}21\,\mathrm{m}$. Vhodným detekčním přístrojem je rádiový teleskop pracující na vlnových délkách řádově desítek cm, např. v Effelsberku v Německu.

Úloha 1.18 Mars pozorovaný pod úhlem $18''$ vyzařuje jako absolutně černé těleso o teplotě 210 K. Určete tok záření od planety na vlnové délce 3 cm.

Řešení: Známe $T = 210\,\mathrm{K}$, $\lambda = 0{,}03\,\mathrm{m}$, $\Theta = 8{,}72 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad}$. Dosadíme do vztahu $S_\nu = B(\nu)\Omega = \frac{2kT}{\lambda^2}\left(\pi\frac{\Theta^2}{4}\right) = 3{,}8 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}\,Hz^{-1}}$.

Úloha 1.19 Tok záření přijímaný od Jupitera na frekvenci 20 MHz je 10^6 Jy. Určete celkový zářivý výkon v jednotkovém rozsahu frekvence, tedy ve $\mathrm{W\,Hz^{-1}}$. Předpokládáme izotropní vyzařování planety a vzdálenost planety v okamžiku pozorování 4,8 AU.

Řešení: Platí převodní vztah $1\,\mathrm{Jy} = 10^{-26}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}\,Hz^{-1}}$. Celkový zářivý výkon je dán vztahem $L = 4\pi r^2 S = 6{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{W\,Hz^{-1}}$.

Úloha 1.20 Určete minimální detekovatelný tok záření rádiovým teleskopem v Jodrell Bank, který má průměr antény 64 m. Šířka pásma je 10 MHz, anténní teplota na pozorované frekvenci je 130 K, předpokládaná časová délka pozorování je 10 minut.

Řešení: $S_{\min} = \frac{2kT_{\mathrm{ant}}}{P(\tau\Delta\nu)^{1/2}} = 1{,}4 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}\,Hz^{-1}}$.

Úloha 1.21 Very Large Array v Socorru ve státě Nové Mexiko v USA se skládá ze soustavy dvaceti sedmi rádiových teleskopů poskládaných do tvaru písmene Y, každý o průměru 25 metrů. Předpokládejte, že VLA souvisle pozoruje zdroj o rádiovém toku 1 Jy v pásmu 10 MHz od roku 1976. Určete celkové množství energie detekované do roku 2006.

Řešení: Úhrnná plocha všech rádiových teleskopů je $1{,}3 \cdot 10^4\,\mathrm{m^2}$. Dále platí vztah $P = S(\nu)A\Delta\nu = 1 \cdot 10^{-26} \cdot 1{,}3 \cdot 10^4 \cdot 10^7 = 1{,}3 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J\,s^{-1}}$. Vzhledem k době pozorování 30 roků $= 9{,}47 \cdot 10^8$ s je celková detekovaná energie $1{,}2 \cdot 10^{-6}$ J.

Úloha 1.22 Jak dlouho družice COBE určená na detekci reliktního záření, musí zachycovat anizotropie záření na úrovni $\Delta T \approx 3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}$ při poměru signál/šum rovnému 10, jestliže je teplota detekčního systému 250 K a šířka pásma 800 MHz.

Řešení: Ze vztahu $\frac{S}{N} = \frac{\Delta T}{T_{\mathrm{sys}}}(\Delta\nu\tau)^{1/2}$ určíme integrační čas $\tau = 8{,}68 \cdot 10^6\,\mathrm{s} = 100$ dnů.

Úloha 1.23 Aktivní galaxie ve vzdálenosti 1 Gpc, s černou dírou obklopenou akrečním

diskem, je zdrojem rentgenového záření o výkonu $L_x = 10^{34}$ W. Určete hustotu rentgenového zářivého toku od tohoto zdroje u Země. Kolik fotonů zachytí detektor na družici Chandra, jestliže jeho sběrná plocha je 0,04 m^2, expoziční doba 10^6 s a průměrná energie fotonu je 5 keV.

Řešení: $F_x = L_x / (4\pi r^2) = 8{,}4 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. Celkové množství energie zachycené během expoziční doby je $W_x = F_x S t = 3{,}3 \cdot 10^{-14}$ J. Při průměrné energii $W_{ef} = 5\,\mathrm{keV} = 8 \cdot 10^{-16}$ J je počet detekovaných fotonů $N_x = W_x / W_f = 42$.

Úloha 1.24 V první polovině 19. století určili nezávisle na sobě tři astronomové paralaxu různých hvězd. Proveďte srovnání přesnosti měření, jestliže je známo: V. J. Struve stanovil $\pi_{\mathrm{Vega}} = 0{,}125''$, zatímco správná hodnota je $\pi_{\mathrm{souč}} = 0{,}129''$. F. W. Bessel určil paralaxu $\pi_{61\ \mathrm{Cygni}} = 0{,}314''$, správná hodnota činila $\pi_{\mathrm{souč}} = 0{,}287''$. T. Henderson v prvních předběžných výsledcích zjistil paralaxu $\pi_{\alpha\ \mathrm{CenA\ Rigil}} = 1{,}16''$, správná hodnota byla $\pi_{\mathrm{souč}} = 0{,}742''$.

Řešení: Absolutní hodnota rozdílu původně historicky naměřené a současné správné paralaxy, podělená správnou současnou hodnotou určuje relativní chybu měření. U Vegy byla přesnost měření $\left|\frac{0{,}004}{0{,}129}\right| \cdot 100 = 3{,}1\,\%$, u 61 Cygni $\left|\frac{0{,}027}{0{,}314}\right| \cdot 100 = 8{,}6\,\%$ a u α Cen A $= \left|\frac{0{,}418}{0{,}742}\right| \cdot 100 = 56{,}3\,\%$. Nejpřesnější měření tak provedl V. J. Struve a nejméně přesná T. Henderson.

Úloha 1.25 Ve vzdálené galaxii byla pozorována supernova typu Ia. V jejím spektru byla zjištěna absorpční čára K Ca II o naměřené vlnové délce 409,10 nm. Předpokládaná pozorovaná hvězdná velikost v barvě B supernovy v maximu jasnosti je $M_B = -19{,}5$ mag. Zvažte, zda bude pozorovatelná dalekohledem o průměru 70 cm.

Řešení: Laboratorní vlnová délka čáry K Ca II je $\lambda_l = 393{,}4$ nm. Dosazením do vztahu $z = v/c = (\lambda_p - \lambda_l)/\lambda_l = 0{,}04$ stanovíme $v = 0{,}04c \Rightarrow v = 1{,}2 \cdot 10^4\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Vzdálenost galaxie r určíme z Hubbleova zákona $r = v/H = 160\,\mathrm{Mpc} = 1{,}6 \cdot 10^8$ pc. Úpravou vztahu pro modul vzdálenosti obdržíme $m_B = M_B + 5 \log r - 5 = 16{,}5$ mag. Pro limitní hvězdnou velikost m_B dalekohledu o průměru D v mm platí vztah $m_B = 2{,}5 + 5 \log D$. Dosazením získáme $D = 631\,\mathrm{mm} = 63{,}1\,\mathrm{cm}$, tudíž dalekohled o průměru 70 cm je postačující pro pozorování supernovy.

Úloha 1.26 Určete optickou hloubku zemské atmosféry od povrchu k sodíkové vrstvě zemské atmosféry, jejíž výška nad Zemí D je přibližně 90 km. Na povrchu Země měříme hustotu toku záření, které je stimulováno pomocí sodíkového laseru se zářivým výkonem L_{vni}. Laserové světlo ozařuje vrstvu sodíku, excituje elektrony. Následně jsou sodíkové atomy deexcitovány a vyzařují světlo do všech směrů. Na Zemi pozorujeme zářivý bod – „umělou hvězdu", která slouží jako srovnávací zdroj k provedení korekce na atmosférické deformace.

Řešení: Pro hustotu zářivého toku platí $F_{\mathrm{vně}} = F_{\mathrm{vni}} \mathrm{e}^{-\tau}$, což lze vyjádřit prostřednictvím zářivého výkonu $L_{\mathrm{vně}} = L_{\mathrm{vni}} \mathrm{e}^{-\tau}$. Rozvedeno $L_{\mathrm{roz}} = L_{\mathrm{vni}} - L_{\mathrm{vně}} = L_{\mathrm{vni}} - L_{\mathrm{vni}} \mathrm{e}^{-\tau} = L_{\mathrm{vni}}(1 - \mathrm{e}^{-\tau})$. Neznáme L_{roz}, ale známe hustotu zářivého toku $F = \frac{L_{\mathrm{vni}}}{4\pi r^2}$. Dosazením obdržíme vztah $F = \frac{L_{\mathrm{roz}}}{4\pi D^2} = \frac{L_{\mathrm{vni}}}{4\pi D^2}(1 - \mathrm{e}^{-\tau})$, ze kterého určíme optickou hloubku $\tau = -\ln\left(1 - \frac{F 4\pi D^2}{L_{\mathrm{vni}}}\right)$.

2 Sluneční soustava

Úloha 2.1 Vysvětlete, proč za běžných podmínek pozorujeme okraj slunečního disku ostře ohraničený zatímco při úplném zatmění se sluneční koróna jeví neostrá? Teplota fotosféry Slunce je 5 780 K, koróny $2 \cdot 10^6$ K.

Řešení: Tlaková škálová výška atmosféry Slunce je dána vztahem $H = \frac{kT}{gm}$, kde m je molekulová hmotnost, v našem případě uvažujme vodíku. Povrchové gravitační zrychlení $g = G\frac{M_\odot}{R_\odot^2} = 2{,}7 \cdot 10^2\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Pro fotosféru po dosazení obdržíme $H = 1{,}8 \cdot 10^5$ m. Vzhledem k tomu, že $H < 10^{-3}\,R_\odot$ pozorujeme okraj slunečního disku ostrý. U koróny $H = 6 \cdot 10^7$ m, tedy $H \cong 0{,}1\,R_\odot$, proto je okraj koróny neostrý a rozmazaný.

Úloha 2.2 Průměrně jeden den po chromosférické erupci na Slunci vznikají různé geofyzikální poruchy. Stanovte kinetickou energii protonů, které je vyvolávají.

Řešení: Průměrnou rychlost protonů stanovíme ze vztahu $v = \frac{r_{\mathrm{ZS}}}{t_\mathrm{d}} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{11}}{8{,}64 \cdot 10^4} = 1{,}7 \cdot 10^6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Rychlosti odpovídá kinetická energie protonů $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m_\mathrm{p} v^2 \cong 2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J} \cong 10\,\mathrm{keV}$.

Úloha 2.3 Můžeme lidským zrakem chráněným vhodným filtrem pozorovat na Slunci sluneční skvrnu o velikosti Země respektive Jupitera? Připomínáme, že lidské oko je schopno rozlišit předměty pozorované přibližně pod úhlem nejméně $2'$.

Řešení: Dosadíme do vztahu $\Theta = D/r_{\mathrm{ZS}}$, v případě skvrny o velikosti Země $D = 12\,756$ km, $\Theta = 18''$, skvrnu nelze pozorovat. Skvrnu o velikosti Jupitera $D = 143\,000$ km, $\Theta = 197'' = 3'17''$ naopak můžeme vidět.

Úloha 2.4 Určete úbytek hmotnosti Slunce prostřednictvím slunečního větru. Předpokládejte sféricky symetrické šíření slunečního větru meziplanetárním prostorem, nechť veškerá hmota ze Slunce prochází sférou ve vzdálenosti $r = 1$ AU. V okolí Země je průměrná rychlost slunečního větru $v = 500\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$, hustota částic je $n = 7 \cdot 10^6\mathrm{m^{-3}}$.

Řešení: Sférickou vrstvou o poloměru r za čas dt projde $\mathrm{d}M = \rho \mathrm{d}V = (n m_\mathrm{H})\,(4\pi r^2 v \mathrm{d}t)$. Zmenšení hmotnosti lze vyjádřit vztahem $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t = 4\pi r^2 n m_\mathrm{H} = 4\pi r^2 \rho v$. Numerickým dosazením obdržíme úbytek hmotnosti Slunce $3 \cdot 10^{-14}\,M_\odot\,\mathrm{rok}^{-1}$.

Úloha 2.5 Stanovte stáří vzorku horniny Země z jihozápadního Grónska, u kterého byl zjištěn poměr ${}^{206}_{82}\mathrm{Pb}/{}^{238}_{92}\mathrm{U} = 0{,}623$. Rozpadová reakce je dána vztahem ${}^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{206}_{82}\mathrm{Pb} + 8\,{}^{4}_{2}\mathrm{He}$, poločas rozpadu $\tau = 4{,}5 \cdot 10^9$ roků.

Řešení: Radioaktivní rozpad popisujeme vztahem $N/N_0 = \exp\left(-\frac{\ln 2t}{\tau}\right)$, kde $N_0 = N + N_{\mathrm{rozpad}} = N + 0{,}623N = 1{,}1623N$. Po dosazení a úpravě obdržíme $t = -\tau \ln \frac{N}{N_0} / \ln 2 = 3{,}65 \cdot 10^9$ roků.

Úloha 2.6 Jaké bylo stáří jednoho ze vzorků horniny Měsíce získaného při výpravě Apolla 17 v roce 1972, jestliže byl u něho zjištěn poměr ${}^{87}_{38}\mathrm{Sr}/{}^{87}_{37}\mathrm{Rb} = 0{,}065$? Rozpadová reakce ${}^{87}_{37}\mathrm{Rb} \rightarrow {}^{87}_{38}\mathrm{Sr} + \mathrm{e}^-$, poločas rozpadu $\tau = 4{,}7 \cdot 10^{10}$ roků.

Řešení: Opět použijeme vztah $N/N_0 = \exp\left(-\frac{\ln 2t}{\tau}\right)$, kde $N_0 = N + N_{\rm rozpad} = N + 0{,}065N = 1{,}065N$. Po dosazení $t = -\tau \ln \frac{N}{N_0} / \ln 2 = 4{,}3 \cdot 10^9$ roků.

Úloha 2.7 Určete tlakové škálové výšky pro kyslík a dusík v atmosféře Země, předpokládejte $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a průměrnou teplotu 280 K.

Řešení: Tlaková škálová výška je pro kyslík $m = 32 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ rovna $H = kT/(gm) = 7{,}4\,\mathrm{km}$. V případě dusíku $m = 28 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ obdržíme $H = kT/(gm) = 8{,}4\,\mathrm{km}$.

Úloha 2.8 Nejvyšší hora na Zemi Mount Everest má výšku $h = 8\,848\,\mathrm{m}$ nad úrovní moře. Horolezci k jejímu zdolání zpravidla používají kyslíkové přístroje. Zdůvodněte proč, stanovte koncentraci kyslíku n na vrcholu hory. Střední teplotu atmosféry Země v této vrstvě atmosféry pokládáme rovnou 280 K.

Řešení: Škálová tlaková výška je pro kyslík při molekulové hmotnosti $m = 32 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ rovna $H = kT/(gm) = 7{,}4\,\mathrm{km}$. U ideálního plynu $n \sim p$. Platí $p(h)/p(h_0) = \exp(-h/H) = 0{,}3$. Koncentrace kyslíku je na vrcholu Mount Everestu rovna přibližně 1/3 hodnoty u mořské hladiny.

Úloha 2.9 Keckovy dalekohledy byly postaveny na vrcholu hory Mauna Kea na Havaji ve výšce $h = 4\,100\,\mathrm{m}$ nad úrovní moře v místě s průměrnou teplotou $T = 280\,\mathrm{K}$. Jedním z důvodů tohoto umístění je snížený obsah vodních par v této výšce, tudíž zlepšení podmínek pro pozorování. Tento úsudek doložte výpočtem.

Řešení: U vodních par je tlaková škálová výška při $m = 18 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $H = kT/(gm) = 12{,}9\,\mathrm{km}$. Pro ideální plyn $n \sim p$. Vypočteme $p(h)/p(h_0) = \exp(-h/H) = 0{,}73$.

Úloha 2.10 Tlaková škálová výška atmosféry Země je $H_{\rm Z} = 8{,}4\,\mathrm{km}$, proveďte její výpočet pro Mars, jestliže $M_{\rm M} = 6{,}4 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$, $M_{\rm M} = 0{,}11 M_{\rm Z}$, $R_{\rm M} = 3\,397\,\mathrm{km}$, $R_{\rm M} = 0{,}53 R_{\rm Z}$, střední teplota atmosféry Země je 280 K, Marsu 190 K.

Řešení: Pro škálovou výšku platí $H = kT/(gm)$, kde u Země předpokládáme složení atmosféry N_2, tedy $m = 28 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. V případě Marsu u složení atmosféry převládá CO_2, tudíž $m = 44 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Připomínáme, že $g \sim M/R^2$. Po dosazení obdržíme $H_{\rm M} = 9{,}6\,\mathrm{km}$.

Úloha 2.11 Určete efektivní teplotu rovnovážného záření Země, jestliže je známo Bondovo albedo Země $A = 0{,}30$, efektivní povrchová teplota Slunce 5 780 K, poloměr Slunce $7 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ a vzdálenost Slunce – Země $a_{\rm SZ} = 1\,\mathrm{AU} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$. Albedo definujeme jako poměr velikosti záření rozptýleného povrchem koule do všech směrů k celkovému množství záření, jež dopadá na povrch při rovnoběžném svazku záření.

Řešení: Pro zářivý výkon povrchu Země platí $4\pi R_{\rm Z}^2 \sigma T_{\rm efZ}^4$, Země absorbuje od Slunce zářivý výkon $(1-A) 4\pi R_\odot^2 \sigma T_{\rm ef\odot}^4 \pi R_{\rm Z}^2 / (4\pi a_{\rm SZ}^2)$. Předpokládáme, že tok záření je u Země absorbován plochou $\pi R_{\rm Z}^2$, ale vyzařován plochou $4\pi R_{\rm Z}^2$ vzhledem k relativně rychlé rotaci Země. Po úpravě obdržíme $T_{\rm efZ} = T_{\rm ef\odot} \left(\frac{R_\odot}{2a_{\rm SZ}}\right)^{1/2} (1-A)^{1/4} = 255\,\mathrm{K}$. Atmosférická teplota je vzhledem ke skleníkovému efektu vyšší, dosahuje zhruba 290 K.

Úloha 2.12 Stanovte efektivní teplotu rovnovážného záření Marsu, známe Bondovo albedo Marsu $A = 0{,}25$, efektivní povrchovou teplotu Slunce 5 780 K, poloměr Slunce $7 \cdot 10^8$ m a vzdálenost Slunce – Mars $a_\mathrm{M} = 1{,}52\,\mathrm{AU} = 2{,}28 \cdot 10^{11}$ m.

Řešení: U Marsu použijeme stejnou úvahu jako u Země, $T_\mathrm{efM} = T_{\mathrm{ef}\odot} \left(\frac{R_\odot}{2a_\mathrm{M}}\right)^{1/2} (1-A)^{1/4} =$ $= 210\,\mathrm{K}$.

Úloha 2.13 Hodnota solární konstanty pro Zemi je ve vzdálenosti 1 AU od Slunce 1 370 $\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$. Určete hodnotu solární konstanty pro Jupiter, který obíhá v průměrné vzdálenosti 5,2 AU od Slunce. Stanovte celkový přijímaný zářivý výkon od Slunce, který získává Jupiter, jestliže Bondovo albedo planety je 0,70.

Řešení: Solární konstanta Jupitera je $S_\mathrm{J} = S_\mathrm{Z}/5{,}2^2 = 51\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. Celkový přijímaný zářivý výkon je $L_{\odot\to\mathrm{J}} = S_\mathrm{J} \pi R_\mathrm{J}^2 (1 - A) = 2{,}4 \cdot 10^{17}\,\mathrm{W}$.

Úloha 2.14 Oběžná doba planetky Icarus obíhající kolem Slunce po eliptické dráze je 1,12 roku, excentricita její dráhy je 0,83. Určete vzdálenost planetky od Slunce v perihéliu a aféliu, stanovte efektivní teplotu rovnovážného záření planetky ve zmíněných bodech její dráhy při znalosti Bondova albeda $A = 0{,}1$.

Řešení: Nejprve určíme velikost velké poloosy, následně perihéliovou a aféliovou vzdálenost. Z $T^2 = a^3 \Rightarrow a = 1{,}08\,\mathrm{AU}$, $r_\mathrm{p} = a(1-e) = 0{,}19\,\mathrm{AU}$, $r_\mathrm{a} = a(1+e) = 1{,}97\,\mathrm{AU}$. Efektivní teplotu stanovíme obdobně jako u úloh 2.12, 2.13, $T_\mathrm{ef,\,p} = 624\,\mathrm{K}$, $T_\mathrm{ef,\,a} = 194\,\mathrm{K}$.

Úloha 2.15 Ze spektroskopických studií Neptuna v infračerveném oboru kosmickou sondou Voyager 2 byla stanovena teplota planety na 56 K. Dokažte, že Neptun má vnitřní zdroje energie, jestliže Bondovo albedo je $A = 0{,}29$, střední vzdálenost od Slunce je $a_\mathrm{Ne} = 30\,\mathrm{AU}$.

Řešení: Nejprve určíme hodnotu solární konstanty Neptuna $S_\mathrm{Ne} = S_\mathrm{Z}/30^2 = 1{,}5\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$. Planetou získávaný zářivý výkon od Slunce je $L_{\odot\to\mathrm{Ne}} = S_\mathrm{Ne} \pi R_\mathrm{Ne}^2 (1-A) = 2 \cdot 10^{15}\,\mathrm{W}$. Efektivní teplota rovnovážného záření planety je $T_\mathrm{ef,\,Ne} = \left(\frac{L_{\odot\to\mathrm{Ne}}}{4\pi\sigma R_\mathrm{Ne}^2}\right)^{1/4} = 46\,\mathrm{K}$. Spektroskopicky zjištěná teplota je vyšší, Neptun má vnitřní zdroje energie.

Úloha 2.16 Hypoteticky předpokládejte, že jediným zdrojem energie vyzařování Jupitera je gravitační potenciální energie. Jak dlouho by mohl vyzařovat při zachování charakteristik, jestliže současný celkový vyzářený výkon Jupitera je $L = 4 \cdot 10^{17}\,\mathrm{W}$.

Řešení: Gravitační potenciální energie homogenní koule je $E_\mathrm{p} = -\frac{3}{5} GM^2/R$, úbytek energie je $\mathrm{d}L/\mathrm{d}t = \mathrm{d}E_\mathrm{p}/\mathrm{d}t = -\frac{3}{5} GM^2/R^2\,\mathrm{d}R/\mathrm{d}t$. Po dosazení obdržíme $\mathrm{d}R/\mathrm{d}t = -10^{-4}\,\mathrm{m{\cdot}rok^{-1}}$. Při současném poloměru $7{,}1 \cdot 10^7$ m může planeta vyzařovat energii ještě miliardy roků.

Úloha 2.17 Podle kosmogonických hypotéz o vzniku sluneční soustavy před 4,7 miliardami roků byl původní zářivý výkon Jupitera $0{,}02\,L_\odot$ při povrchové teplotě 1 000 K. Za předpokladu, že vyzařoval jako absolutně černé těleso určete jeho tehdejší poloměr.

Řešení: Původní poloměr stanovíme ze vztahu $R = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T_\mathrm{ef}^4}\right)^{1/2} = 3{,}3 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$.

Úloha 2.18 Můžeme ze Země vidět na Marsu údolní útvar Valley Marineris, jehož šířku

odhadujeme na 200 km? Předpokládejte pozorování v době opozice, při které je Mars vzdálen od Země $5{,}6 \cdot 10^{10}$ m.

Řešení: Při zadané vzdálenosti Marsu je šířka údolí Valley Marineris pozorována pod úhlem $\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\,^\circ$, tedy přibližně $0{,}5''$, což je na hranici rozlišitelnosti největšími pozemskými dalekohledy za ideálních podmínek. Naopak z Marsu by za stejných podmínek bylo možné pozorovat například ústí Amazonky do Atlantického oceánu, jehož šířka přesahuje 250 km.

Úloha 2.19 Merkur má průměrnou hustotu $\rho_c = 5{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Předpokládaná hustota povrchových vrstev $\rho_o = 4{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, jádra $\rho_j = 8 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Určete relativní velikost poloměru jádra planety.

Řešení: Celková hmotnost Merkuru se skládá z hmotností jádra a obalu $M_c = M_j + M_o$, tedy $\frac{4}{3}\pi\rho_c R_c^3 = \frac{4}{3}\pi\rho_j R_j^3 + \frac{4}{3}\pi\rho_o(R_c^3 - R_j^3)$. Po úpravě obdržíme $R_j/R_c = \left(\frac{\rho_c - \rho_o}{\rho_j - \rho_o}\right)^{1/3} = 0{,}64$.

Úloha 2.20 Objasněte, proč měsíc Saturna Titan si zachoval svoji atmosféru zatímco Merkur nikoliv. Maximální teplota v dusíkové atmosféře Titanu je 100 K, na povrchu Merkuru až 800 K.

Řešení: K dlouhodobému udržení atmosfér kosmických těles musí být splněna zhruba podmínka $v_p \geq 10 v_{sk}$ (kde v_p je parabolická rychlost, v_{sk} je střední kvadratická rychlost molekul plynu), tedy $\left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2} \geq 10\left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2}$. Mariner 10 v roce 1974 bezúspěšně hledal u Merkuru případnou tenkou vrstvu atmosféry z hélia. Pro tento prvek platí $v_p/v_{sk} = 4{,}2/2{,}1 = 2$, atmosféra by tak mohla existovat pouze několik dnů. Titan má atmosféru složenou převážně z molekulárního dusíku. Po dosazení obdržíme $v_p/v_{sk} = 2{,}7/0{,}3 = 9$, tedy podmínka pro dlouhodobou existenci atmosféry je téměř splněna.

Úloha 2.21 Dokažte pro dostatečně malé částice prachu v kometárním ohonu, že síla tření způsobená slunečním větrem je větší než gravitační síla Slunce.

Řešení: Gravitační síla Slunce působící na částici prachu kulového tvaru má velikost $F_g = GM_\odot m_č/R^2 = GM_\odot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_č/R^2$. Pro gravitační sílu platí $F_g = Ar^3$, kde $A = GM_\odot \frac{4}{3}\pi\rho_č/R^2$. Síla tření způsobená slunečním větrem má podle Stokesova vztahu velikost $F_t = Br^2$, kde B je konstanta závislá na vlastnostech meziplanetárního prostředí. Odtud dostáváme poměr $F_t/F_g = B/(Ar)$. Tedy pro dostatečně malé hodnoty poloměru částice prachu je síla tření větší než gravitační síla Slunce. Sluneční vítr tak odfoukává malé prachové částice z blízkosti jádra komety a ty vytvářejí prachový kometární ohon.

Úloha 2.22 Prověřte, zda molekuly CN (emisní pás $\lambda = 388{,}3$ nm) jsou uvolňovány z povrchu jádra komety Hale – Bopp v heliocentrické vzdálenosti $r = 2{,}9$ AU při teplotě $T = 200$ K. Kometární jádro má hustotu přibližně $\rho = 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a poloměr $R = 10$ km.

Řešení: $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = 4{,}2 \cdot 10^{15}$ kg. Úniková rychlost z jádra $v_p = (2GM/R)^{1/2} = 7{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, zatímco střední kvadratická rychlost $v_{sk} = (3kT/m)^{1/2} = 436\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Působením slunečního záření již molekuly CN opustily povrch jádra komety.

Úloha 2.23 Častým námětem katastrofických filmů je dopad komet na povrch Země. Hypoteticky předpokládejte pád jádra komety do Tichého oceánu rychlostí $10\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Nechť

má sférický tvar o průměru $R = 3\,\mathrm{km}$ a hustotě $\rho = 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Určete velikost uvolněné energie a porovnejte ji s energií uvolňovanou při erupcích sopek, která dosahuje 100 MTNT. Připomínáme, že 1 megatuna TNT odpovídá energii $4{,}2\cdot 10^{15}\,\mathrm{J}$. Jak velké množství vody se při pádu vypaří?

Řešení: Určíme hmotnost jádra komety $M = \rho V = 1{,}4\cdot 10^{13}\,\mathrm{kg}$, kinetická energie uvolněná při dopadu je $\frac{1}{2}Mv^2 = 7\cdot 10^{20}\,\mathrm{J}$, tedy mnohem větší než při erupcích sopek. Množství vypařené vody stanovíme ze vztahu $m = E_\mathrm{k}/l_\mathrm{v}$, kde $l_\mathrm{v} = 2{,}26\cdot 10^6\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$. Po dosazení za zjednodušujících předpokladů $\rho_\mathrm{v} = 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ dostaneme $V = 300\,\mathrm{km}^3$.

Úloha 2.24 Určete pomocí empirického vztahu $D \cong D_0(E_\mathrm{k}/E_\mathrm{k0})^{0{,}294}$, kde $D_0 = 15\,\mathrm{km}$, $E_\mathrm{k0} = 10^{20}\,\mathrm{J}$ přibližnou hmotnost a poloměr meteoritu Ries, po jehož dopadu zůstal v Německu kráter o průměru $D = 24\,\mathrm{km}$. Předpokládejte modelovou rychlost dopadu $25\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ a hustotu $\rho = 3\cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Řešení: Ze vztahu $D \cong D_0(E_\mathrm{k}/E_\mathrm{k,0})^{0{,}294}$ nejprve stanovíme $E_\mathrm{k} = 5\cdot 10^{20}\,\mathrm{J}$. Odtud určíme při předpokladu $v = 25\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ hmotnost meteoritu $m = 1{,}6\cdot 10^{12}\,\mathrm{kg}$. Poloměr stanovíme ze vztahu $R = \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi\rho}\right)^{1/3} = 500\,\mathrm{m}$.

Úloha 2.25 Měsíc Charon obíhá kolem Pluta ve vzdálenosti $a_\mathrm{Ch} = 19\,640\,\mathrm{km}$ za dobu $T_\mathrm{Ch} = 6{,}39$ dne. Poloměr Pluta je $R_\mathrm{Pl} = 1\,150\,\mathrm{km}$, $R_\mathrm{Ch} = 600\,\mathrm{km}$. Za zjednodušujícího předpokladu, že obě tělesa mají stejnou hustotu, určete jejich hmotnosti.

Řešení: Z III. Keplerova zákona $a_\mathrm{Ch}^3/T_\mathrm{Ch}^2 = G(M_\mathrm{Pl} + M_\mathrm{Ch})/(4\pi^2)$ stanovíme hmotnost soustavy Pluto – Charon $M_\mathrm{Pl} + M_\mathrm{Ch} = 1{,}4\cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$. Vzhledem k objemům těles dostaneme $M_\mathrm{Pl} = 1{,}2\cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$, $M_\mathrm{Ch} = 1{,}7\cdot 10^{21}\,\mathrm{kg}$. Ve skutečnosti je poměr hustot přibližně $\rho_\mathrm{Pl} : \rho_\mathrm{Ch} = 2 : 1$.

Úloha 2.26 V jaké vzdálenosti od Pluta se nachází hmotný střed soustavy Pluto – Charon? Pluto má hmotnost $M_\mathrm{Pl} = 1{,}2\cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$ a Charon $M_\mathrm{Ch} = 1{,}7\cdot 10^{21}\,\mathrm{kg}$, velká poloosa dráhy Charona je $19{,}6\cdot 10^3\,\mathrm{km}$.

Řešení: Platí vztah $M_\mathrm{Pl}a_\mathrm{Pl} + M_\mathrm{Ch}a_\mathrm{Ch} = (M_\mathrm{Pl} + M_\mathrm{Ch})a_\mathrm{spol}$.Zvolme souřadnou soustavu, kde $a_\mathrm{Pl} = 0$, a_Ch je vzdálenost mezi oběma objekty, a_spol je vzdálenost středu hmotnosti a Pluta. Řešením dostaneme $a_\mathrm{spol} = M_\mathrm{Ch}a_\mathrm{Ch}/(M_\mathrm{Pl} + M_\mathrm{Ch}) = 2\,100\,\mathrm{km}$. Tedy hmotný střed leží asi 1 000 km nad povrchem Pluta.

Úloha 2.27 Jak se mění tlaková škálová výška atmosféry Pluta při přechodu z afélia do perihélia při excentricitě dráhy planety $e = 0{,}25$?

Řešení: Tlaková škálová výška atmosféry je dána vztahem $H = kT/(gm)$, přičemž pro teplotu rovnovážného záření Pluta platí $T \approx r^{-1/2}$, kde r je vzdálenost od Slunce. Aféliová a periheliová vzdálenost jsou dány vztahy $r_\mathrm{a} = a(1+e)$ a $r_\mathrm{p} = a(1-e)$. Dosazením obdržíme $\frac{T_\mathrm{p}}{T_\mathrm{a}} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} = 1{,}3$. V tomto poměru se mění škálová výška atmosféry.

Úloha 2.28 Astrologové tvrdí, že kosmická tělesa, zejména planety svými astrologickými silami v okamžiku narození lidí ovlivňují jejich charaktery. Vypočtěte poměr gravitačních sil

Jupitera a Země na nově narozené dítě v okamžiku, kdy se Jupiter nachází v opozici ve vzdálenosti 4,2 AU od Země.

Řešení: Určíme poměr gravitačních sil Jupitera a Země $\frac{F_\mathrm{J}}{F_\mathrm{Z}} = \frac{G\frac{m_\mathrm{d}M_\mathrm{J}}{r_\mathrm{ZJ}^2}}{G\frac{m_\mathrm{d}M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}^2}} = 3{,}3 \cdot 10^{-8}$. Gravitační vliv Jupitera je zcela zanedbatelný.

3 Kosmická mechanika

Úloha 3.1 Odvoďte vztahy a vyjádřete hodnoty pro I. II. a III. kosmickou rychlost při povrchu Země.

Řešení: Pro I. kosmickou rychlost platí $v_\mathrm{I} = \sqrt{G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}}} = 7{,}9\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, pro II. kosmickou rychlost $v_\mathrm{II} = \sqrt{2G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}}} = 11{,}2\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Parabolická rychlost vzhledem ke Slunci je $v_\mathrm{pS} = \sqrt{2G\frac{M_\odot}{r_\mathrm{ZS}}} = 42{,}3\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, střední rychlost Země kolem Slunce $29{,}8\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, tedy potřebujeme rychlost $12{,}5\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ na hranici oblasti přitažlivosti Země. Pro startovací rychlost ze Země platí $v = \sqrt{11{,}2^2 + 12{,}5^2} = 16{,}7\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Úloha 3.2 Kolikrát je I. kosmická rychlost na Zemi větší než na Měsíci? Hmotnost Země je 81krát větší než hmotnost Měsíce, poloměr Země je 3,75krát větší než poloměr Měsíce.

Řešení: Platí $\frac{v_\mathrm{IZ}}{v_\mathrm{IM}} = \sqrt{\frac{M_\mathrm{Z}}{M_\mathrm{M}}\frac{R_\mathrm{M}}{R_\mathrm{Z}}} = 4{,}65$.

Úloha 3.3 Pozorováním z povrchu Země byla určena rychlost pohybu umělé družice Země na kruhové oběžné dráze na $7{,}5\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. V jaké výšce nad povrchem se pohybuje?

Řešení: Pro rychlost na kruhové dráze platí vztah $v_\mathrm{k} = \sqrt{G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h}}$, odtud určíme $h = 710\,\mathrm{km}$.

Úloha 3.4 Jedna ze spojových družic série Molnija měla po vypuštění následující parametry oběžné dráhy: výšku perigea $H_\mathrm{p} = 500\,\mathrm{km}$ a výšku apogea $H_\mathrm{a} = 40\,000\,\mathrm{km}$. Vypočtěte rychlost družice v perigeu a apogeu.

Řešení: Nejprve stanovíme $r_\mathrm{a} = R_\mathrm{Z} + H_\mathrm{a} = 4{,}64\cdot 10^7\,\mathrm{m}$ a $r_\mathrm{p} = R_\mathrm{Z} + H_\mathrm{p} = 6{,}9\cdot 10^6\,\mathrm{m}$, pro velikost hlavní poloosy platí $a = \frac{r_\mathrm{a}+r_\mathrm{p}}{2} = 2{,}67\cdot 10^7\,\mathrm{m}$. Rychlost v apogeu určíme ze vztahu $v_\mathrm{a} = \sqrt{GM_\mathrm{Z}\left(\frac{2}{r_\mathrm{a}} - \frac{1}{a}\right)} = 1{,}5\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ a v perigeu $v_\mathrm{p} = \sqrt{GM_\mathrm{Z}\left(\frac{2}{r_\mathrm{p}} - \frac{1}{a}\right)} = 10{,}0\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Úloha 3.5 Umělá družice Země byla navedena na oběžnou kruhovou dráhu ve výšce $h = 600\,\mathrm{km}$. Vypočtěte její kruhovou rychlost v $\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ s platností na dvě desetinná čísla. Určete parametry dráhy, zvýšíme-li její rychlost o $2{,}95\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Řešení: Pro kruhovou dráhu obdržíme $v_\mathrm{k} = \sqrt{G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h}} = 7{,}58\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Po zvýšení rychlosti se družice dostane na eliptickou dráhu, pro velikost její hlavní poloosy a platí $a = \frac{r_\mathrm{p}GM_\mathrm{Z}}{2GM_\mathrm{Z}-r_\mathrm{p}v_\mathrm{p}^2} = 101\,000\,\mathrm{km}$, odtud $H_\mathrm{a} = 2a - (2R_\mathrm{Z} - H_\mathrm{p}) = 189\,000\,\mathrm{km}$.

Úloha 3.6 Umělá družice Země se pohybuje po oběžné kruhové dráze ve výšce $h = 760\,\mathrm{km}$. Potřebujeme ji převést na eliptickou dráhu s maximální vzdáleností od povrchu Země $H_\mathrm{a} = 40\,000\,\mathrm{km}$ a minimální vzdáleností $H_\mathrm{p} = 760\,\mathrm{km}$. Určete velikost potřebné změny rychlosti družice a velikost nové oběžné doby.

Řešení: Předpokládejme, že změna rychlosti družice proběhne za velmi krátký časový okamžik ve srovnání s velikostí oběžné doby. Platí $v_\mathrm{k} = \sqrt{G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h}} = 7{,}48\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, dále ze

vztahu $2a = H_\mathrm{p} + H_\mathrm{a} + 2R_\mathrm{Z}$ určíme $a = 26\,754\,\mathrm{km}$. Rychlost v perigeu eliptické dráhy je $v_\mathrm{p} = \sqrt{GM_\mathrm{Z}\left(\frac{2}{r_\mathrm{p}} - \frac{1}{a}\right)} = 9{,}84\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, změna rychlosti $\Delta v = v_\mathrm{p} - v_\mathrm{k} = 2{,}36\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Oběžnou dobu stanovíme z III. Keplerova zákona $\frac{a_\mathrm{k}^3}{a_\mathrm{e}^3} = \frac{T_\mathrm{e}^2}{T_\mathrm{k}^2}$, kde $a_\mathrm{k} = R_\mathrm{Z} + h$, $a = a_\mathrm{e}$. Odtud při $T_\mathrm{k} = \frac{2\pi(R_\mathrm{Z}+h)}{v_\mathrm{k}} = 1{,}7\,\mathrm{hod}$. $T_\mathrm{e} = 12{,}1\,\mathrm{hod}$.

Úloha 3.7 Jaká minimální práce byla vykonána při převedení Hubbleova dalekohledu o hmotnosti $m_\mathrm{H} = 1{,}1\cdot 10^4\,\mathrm{kg}$ z kruhové oběžné dráhy ve výšce $h_1 = 500\,\mathrm{km}$ na $h_2 = 600\,\mathrm{km}$.

Řešení: Vykonaná práce při přechodu z jedné na druhou oběžnou dráhu je rovna $A = (W_\mathrm{k1} + W_\mathrm{p1}) - (W_\mathrm{k2} + W_\mathrm{p2}) = \left(\frac{1}{2}m_\mathrm{H}v_1^2 - G\frac{m_\mathrm{H}M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h_1}\right) - \left(\frac{1}{2}m_\mathrm{H}v_2^2 - G\frac{m_\mathrm{H}M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h_2}\right)$, pro rychlosti na kruhových oběžných drahách platí $v_\mathrm{k} = \sqrt{G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h}}$. Po dosazení obdržíme $A = G\frac{m_\mathrm{H}M_\mathrm{Z}}{2}\left(\frac{1}{R_\mathrm{Z}+h_2} - \frac{1}{R_\mathrm{Z}+h_1}\right) = 4{,}5\cdot 10^9\,\mathrm{J}$.

Úloha 3.8 Nalezněte minimální práci, kterou je třeba vynaložit, abychom těleso o hmotnosti 1 kg přenesli z povrchu Země na povrch Měsíce. Odpor atmosféry Země zanedbáváme, stejně jako vliv Slunce a planet.

Řešení: Minimální práce je rovna $A \cong mR_\mathrm{Z}g_\mathrm{Z} - mR_\mathrm{M}g_\mathrm{M} \cong 6{,}1\cdot 10^{12}\,\mathrm{J}$.

Úloha 3.9 Lze na oběžnou dráhu kolem Venuše umístit stacionární družici bez aktivního pohonu? Údaje o siderické oběžné době a hmotnosti planety vyhledejte například na adrese `http://ads.harvard.edu/books/hsaa/`. Siderická doba rotace je $T_\mathrm{V} = 243{,}019$ dne a hmotnost $M_\mathrm{V} = 6{,}4\cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$.

Řešení: Ze vztahu $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{G\frac{M_\mathrm{V}}{r}}}$ stanovíme $r = \left(\frac{\mathrm{G}M_\mathrm{V}T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1\,528\,000\,\mathrm{km}$. Oblast aktivity Venuše vzhledem ke Slunci má přibližný poloměr 615 000 km, tudíž družice bude velmi rychle zachycena gravitační silou Slunce.

Úloha 3.10 Které těleso, Země nebo Slunce, působí větší gravitační silou na Měsíc? Proveďte diskusi, proč Měsíc obíhá kolem Země a nikoliv kolem Slunce. $M_\odot = 330000\,M_\mathrm{Z}$, $r_\mathrm{MS} = 390\,r_\mathrm{MZ}$.

Řešení: Platí $\frac{F_\mathrm{MS}}{F_\mathrm{MZ}} = \frac{G\frac{M_\mathrm{M}M_\odot}{r_\mathrm{MS}^2}}{G\frac{M_\mathrm{M}M_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{MZ}^2}} = 2{,}17$. Kolem Slunce obíhá barycentrum soustavy Země – Měsíc.

Úloha 3.11 Určete poměr slapových působících na Zemi, vyvolaných Sluncem a Měsícem. Jak by se situace změnila, jestliže by se hypoteticky vzdálenost Měsíce zvětšila 2krát. Nezbytné číselné údaje o hmotnostech těles a jejich vzdálenostech nalezněte v tabulkách.

Řešení: Vztah pro slapovou sílu, kde Země je rušené kosmické těleso a Měsíc respektive Slunce jsou rušícími, je dán vztahem $F = \frac{2\mathrm{G}M_\mathrm{Z}M_\text{rušící}R_\mathrm{Z}}{r^3}$, kde r je vzdálenost středů obou uvažovaných kosmických těles. Připomínáme, že vztah udává převrácenou kubickou závislosti s mnohem rychlejším poklesem síly. Po dosazení číselných hodnot obdržíme pro velikost působících slapových sil Měsíce na Zemi $F_\mathrm{MZ} = 6{,}7\cdot 10^{18}\,\mathrm{N}$ a Slunce na Zemi $F_\mathrm{SZ} = 3{,}0\cdot 10^{18}\,\mathrm{N}$. Tedy

prvně počítané slapové působení činí 2/3 a druhé 1/3 z celkového slapového působení obou kosmických těles. Slapové síly vyvolávané Měsícem jsou přibližně 2,2krát větší než slapové síly Slunce. Jinak vyjádřeno slapové síly vytvářené Sluncem dosahují přibližně pouze 46% slapových sil Měsíce. Při hypotetickém zvětšení vzdálenosti Měsíce 2krát, by jeho slapové působení pokleslo 8krát a stalo by se 4krát slabší než slapové působení od Slunce.

Úloha 3.12 Síly přílivového tření vyvolané především měsíčními slapy zpomalují rotaci Země. Tento proces bude pokračovat, dokud úhlová rychlost rotace Země nebude rovna úhlové rychlosti oběžného pohybu Měsíce kolem Země. Určete vzdálenost Měsíce od Země a_{kon} a jeho oběžnou dobu T_{kon} při této tzv. oboustranné vázané rotaci obou těles při předpokládaném lineárním vzdalování Měsíce od Země. Rotační moment hybnosti Měsíce na počátku a konci uvažovaného procesu jakož i Země v konečném stavu budeme zanedbávat. Pro zjednodušení dále předpokládejme, že rotační osa Země je kolmá k oběžné rovině měsíční dráhy. Rotační moment hybnosti Země v současnosti je $L_{\text{Zrot}} = 6 \cdot 10^{33}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot s^{-1}$, moment setrvačnosti Země $J_Z = 8 \cdot 10^{37}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$, předpokládáme znalost r_{ZM}, M_{M}, $T_{\text{poč}}$.

Řešení: V izolované soustavě, za kterou můžeme zjednodušeně považovat soustavu Země – Měsíc, platí zákon zachování momentu hybnosti. Pro počáteční a koncový stav platí $L_{c1} = L_{c2}$. Z platnosti podmínek v zadání vyplývá $L_{c1} = L_{\text{Zrot}} + L_{\text{Mpoč}}$ a $L_{c2} = L_{\text{Mdrah}}$. Moment setrvačnosti Měsíce vzhledem k rotační ose Země je $J_{\text{Mpoč}} = M_{\text{M}} a_{\text{poč}}^2 = 1{,}08 \cdot 10^{40}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$, jeho současná dráhová úhlová rychlost $\omega_{\text{poč}} = \frac{2\pi}{T_{\text{S}}} = 2{,}7 \cdot 10^{-6}\,\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Dráhový moment hybnosti Měsíce nyní $L_{\text{Mhpoč}} = J_{\text{Mpoč}} \omega_{\text{poč}} = 2{,}9 \cdot 10^{34}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Počáteční celkový moment hybnosti je $L_{c1} = L_{\text{Zrot}} + L_{\text{Mpoč}} = 3{,}5 \cdot 10^{34}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Aplikujeme zákon zachování momentu hybnosti $L_{c1} = L_{c2}$, kde $L_{c2} = M_{\text{M}} a_{\text{kon}}^2 \omega_{\text{kon}}$. Dále platí III. Keplerův zákon upravený do tvaru $a_{\text{poč}}^3 \omega_{\text{poč}}^2 = a_{\text{kon}}^3 \omega_{\text{kon}}^2$. Po dosazení a úpravách obdržíme $a_{\text{kon}} = a_{\text{poč}} \left(\frac{L_{c2}}{L_{\text{Mpoč}}} \right)^2 = 1{,}45\, a_{\text{poč}} = 5{,}6 \cdot 10^8\,\text{m}$. Rovněž z III. Keplerova zákona získáme konečnou úhlovou rychlost $\omega_{\text{kon}} = \omega_{\text{poč}} \left(\frac{a_{\text{poč}}}{a_{\text{kon}}} \right)^{\frac{3}{2}} = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ s konečnou oběžnou dobou $T_{\text{kon}} = T_{\text{poč}} \frac{\omega_{\text{poč}}}{\omega_{\text{kon}}} = 48\,\text{dnů}$.

Úloha 3.13 Jak bychom hypoteticky museli změnit hmotnost Země, aby Měsíc obíhal ve stejné vzdálenosti kolem Země s oběžnou dobou 3krát menší?

Řešení: Použijeme III. Keplerův zákon v přesném znění $\frac{T_0^2 (M_{\text{Z0}} + M_{\text{M}})}{T_1^2 (M_{\text{Z1}} + M_{\text{M}})} = \frac{a_0^3}{a_1^3}$, kde hmotnost M_{M} Měsíce zanedbáváme, M_{Z1} je změněná hmotnost Země. Úpravou vztahu obdržíme $\frac{T_0^2 M_{\text{Z0}}}{\left(\frac{1}{3} T_0\right)^2 M_{\text{Z1}}} = 1 \Rightarrow M_{\text{Z1}} = 9 M_{Z0}$.

Úloha 3.14 Jaká by musela být hmotnost Slunce, aby Země obíhající kolem něho se stejnou oběžnou dobou, se nacházela ve dvojnásobné vzdálenosti?

Řešení: Dosadíme do rovnice vyjadřující, že dostředivé zrychlení je vytvářeno silou přitažlivosti Slunce $G \frac{M_{\odot 0} M_{\text{Z}}}{r_{\text{SZ}}^2} = \frac{M_{\text{Z}} v_{\text{Z}}^2}{r_{\text{SZ}}}$, kde $\frac{M_{\text{Z}} v_{\text{Z}}^2}{r_{\text{SZ}}} = \frac{M_{\text{Z}} \left(\frac{2\pi r_{\text{SZ}}}{T_{\text{Z}}} \right)^2}{r_{\text{SZ}}}$. Obdobně v případě hypotetického přesunu na dvojnásobnou vzdálenost platí $G \frac{M_{\odot 1} M_{\text{Z}}}{(2 r_{\text{SZ}})^2} = \frac{M_{\text{Z}} \left(\frac{2\pi 2 r_{\text{SZ}}}{T_{\text{Z}}} \right)^2}{2 r_{\text{SZ}}}$. Podělením druhé rovnice první obdržíme po úpravě $M_{\odot 1} = 8 M_{\odot 0}$.

Úloha 3.15 Úbytek hmotnosti Slunce vyvolaný jeho vyzařováním činí za 1 s $4{,}3 \cdot 10^9\,\text{kg}$,

ročně $6{,}7 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{M_\odot} \cdot \mathrm{rok}^{-1}$, úbytek vyvolaný slunečním větrem $10^{-14}\,\mathrm{M_\odot} \cdot \mathrm{rok}^{-1}$. Jak se změní poloměr dráhy Země kolem Slunce v důsledku těchto jevů? Zjednodušeně předpokládejme kruhový tvar dráhy Země.

Řešení: Dosadíme do rovnice vyjadřující zákon zachování mechanické energie pro pohyb Země $\frac{1}{2}M_\mathrm{Z}v_\mathrm{Z0}^2 - G\frac{M_\mathrm{Z}M_{\odot 0}}{r_\mathrm{ZS0}} = \frac{1}{2}M_\mathrm{Z}v_\mathrm{Z1}^2 - G\frac{M_\mathrm{Z}M_{\odot 1}}{r_\mathrm{ZS1}}$. Při zjednodušení na kruhovou dráhu dostáváme $G\frac{M_\mathrm{Z}M_\odot}{r_\mathrm{ZS}^2} = \frac{M_\mathrm{Z}v_\mathrm{Z}^2}{r_\mathrm{ZS}} \Rightarrow v_\mathrm{ZS}^2 = G\frac{M_\odot}{r_\mathrm{ZS}}$. Následně dosadíme do rovnice pro zákon zachování energie $\frac{1}{2}\frac{GM_\mathrm{Z}M_{\odot 0}}{r_\mathrm{ZS0}} - \frac{GM_\mathrm{Z}M_{\odot 0}}{r_\mathrm{ZS0}} = \frac{1}{2}\frac{GM_\mathrm{Z}M_{\odot 1}}{r_\mathrm{ZS1}} - \frac{GM_\mathrm{Z}M_{\odot 1}}{r_\mathrm{ZS1}}$. Po úpravě obdržíme $\frac{M_{\odot 1}}{M_{\odot 0}} = \frac{r_\mathrm{ZS1}}{r_\mathrm{ZS0}}$. Podělením čitatelů Δt, zvolíme $\Delta t = 1\,\mathrm{rok}$, $r_\mathrm{ZS0} = 1\,\mathrm{AU}$ získáme vztah $\frac{\frac{\Delta M_{\odot 0}}{\Delta t}}{M_{\odot 0}} = \frac{\frac{\Delta r_\mathrm{ZS0}}{\Delta t}}{r_\mathrm{ZS0}} \Rightarrow$ $\frac{\Delta r_\mathrm{ZS0}}{\Delta t} = 8 \cdot 10^{-14}\, r_\mathrm{ZS0} \cdot \mathrm{rok}^{-1}$. Přepočtením získáme $\frac{\Delta r_\mathrm{ZS0}}{\Delta t} = 1\,\mathrm{cm} \cdot \mathrm{rok}^{-1}$.

Úloha 3.16 Kometa prošla perihéliem ve vzdálenosti $r = 0{,}587\,\mathrm{AU}$ rychlostí $v = 54{,}52\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Po jaké dráze se pohybuje, určete její parametry.

Řešení: Ke stanovení typu dráhy určíme kruhovou a parabolickou rychlost v dané vzdálenosti od Slunce, $v_\mathrm{k} = \sqrt{G\frac{M_\odot}{r}} = 38{,}87\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$, $v_\mathrm{p} = \sqrt{2G\frac{M_\odot}{r}} = 54{,}96\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Protože platí $v_\mathrm{k} < v < v_\mathrm{p}$, kometa se pohybuje pro eliptické dráze. Ze vztahu pro rychlost komety v perihéliu $v = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r_\mathrm{p}} - \frac{1}{a}\right)}$ vyjádříme velikost velké poloosy $a = 18\,\mathrm{AU}$. Oběžnou dobu stanovíme z III. Keplerova zákona $T = a\sqrt{a} = 76\,\mathrm{roků}$. Excentricitu vypočítáme $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{a-r}{a} = 0{,}967$. Rychlost komety v aféliu je rovna $v_\mathrm{a} = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a}\right)} = 0{,}9\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

Úloha 3.17 V román Julese Vernea Hector Servadac (u nás známého pod názvem Na kometě) se autor zmiňuje o planetce Galia s oběžnou dobou T_G =2 roky a vzdáleností v aféliu 820 000 000 km. Může se planetka pohybovat po takové dráze?

Řešení: Platí III. Keplerův zákon $\frac{a_\mathrm{Z}^3}{T_\mathrm{Z}^2} = \frac{a_\mathrm{G}^3}{T_\mathrm{G}^2}$. Při předpokládané oběžné době 2 roky je velikost hlavní poloosy dráhy $a_\mathrm{G} = 1{,}59\,\mathrm{AU}$. Planetka s těmito parametry nemůže existovat.

Úloha 3.18 Vypočítejte rychlost planetky Hektor v perihéliu a aféliu, jestliže její kruhová rychlost se blíží $13{,}1\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ a excentricita její dráhy je $\varepsilon = 0{,}024$. Přibližně na jaké střední heliocentrické vzdálenosti se planetka nachází?

Řešení: Pro rychlost v perihéliu platí $v_\mathrm{per} = v_\mathrm{k}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = 13{,}4\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$, pro rychlost v aféliu $v_\mathrm{afél} = v_\mathrm{k}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} = 12{,}8\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Pro kruhovou dráhu platí vztah $v_\mathrm{k} = \frac{29{,}8}{\sqrt{r}}$, kde rychlost je $\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ a r v AU. Dosazením obdržíme $r = 5{,}17\,\mathrm{AU}$.

Úloha 3.19 Jakou metodou mohou kosmonauté nacházející se v kosmické lodi pohybující se po nízké kruhové oběžné dráze kolem planety určit pomocí hodin její hustotu?

Řešení: Za předpokladu $h \ll R$ platí $T = \frac{2\pi R}{v_\mathrm{k}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{G\frac{M}{R}}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G}}\frac{1}{\sqrt{\rho}}$, kde $\frac{1}{\sqrt{\rho}} = \sqrt{\frac{4\pi R^3}{3M}}$. Oběžná doba kosmické lodi závisí na hustotě planety.

Úloha 3.20 Na čem závisí velikost celkové mechanické energie družice pohybující se kolem Země po eliptické dráze?

Řešení: Vyjdeme ze zákona zachování energie $\frac{m_\mathrm{d} v_\mathrm{p}^2}{2} - G\frac{m_\mathrm{d} M_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{p}} = \frac{m_\mathrm{d} v_\mathrm{a}^2}{2} = G\frac{m_\mathrm{d} M_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{a}}$ a zákona zachování momentu hybnosti $m_\mathrm{d} r_\mathrm{p} v_\mathrm{p} = m_\mathrm{d} r_\mathrm{a} v_\mathrm{a}$. Řešením rovnic obdržíme vztah pro celkovou mechanickou energie $W_\mathrm{c} = -G\frac{m_\mathrm{d} M_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{p}+r_\mathrm{a}} = -G\frac{m_\mathrm{d} M_\mathrm{Z}}{2a}$, která závisí na velikosti velké poloosy.

Úloha 3.21 Družice o hmotnosti $m_\mathrm{d} = 10^3\,\mathrm{kg}$ se pohybuje po kruhové oběžné dráze nad povrchem Země ve výšce $h = 10^3\,\mathrm{km}$. Jaká je její kinetická, potenciální a celková energie? Údaje o hmotnosti a poloměru Země naleznete v tabulkách `http://ads.harvard.edu/books/hsaa/`.

Řešení: Nejprve stanovíme velikost kruhové rychlosti družice $v_\mathrm{k} = \sqrt{G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h}}$, po dosazení obdržíme $v_\mathrm{k} = 7{,}34 \cdot 10^3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Pro kinetickou energii obdržíme $W_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m_\mathrm{d} v_\mathrm{k}^2 = 2{,}7 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$, pro potenciální energii $W_\mathrm{p} = -G\frac{m_\mathrm{d} M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h} = -5{,}4 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$. Připomínáme, že platí viriálová věta $\langle W_\mathrm{k} \rangle = -\frac{1}{2}\langle W_\mathrm{p} \rangle$.

Úloha 3.22 Určete rychlost družice Orbiter 1 v periseleniu a aposeleniu, jestliže její střední výška nad povrchem Měsíce byla $h = 1\,027\,\mathrm{km}$ a excentricita dráhy $\varepsilon = 0{,}298$. Údaje o Měsíci, jeho hmotnosti a poloměru najděte v tabulkách `http://ads.harvard.edu/books/hsaa/`.

Řešení: Pro rychlost na kruhové dráze platí $v_\mathrm{k} = \sqrt{G\frac{M_\mathrm{M}}{R_\mathrm{M}+h}} = 1{,}33 \cdot 10^3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Pro rychlost v periseleniu platí $v_\mathrm{per} = v_\mathrm{k}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = 1\,810\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a pro rychlost v aposeleniu $v_\mathrm{apos} = v_\mathrm{k}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} = 978\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Úloha 3.23 Kosmická loď o hmotnosti $m_\mathrm{l} = 12 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$ se pohybuje po kruhové oběžné dráze nad povrchem Měsíce ve výšce $h = 100\,\mathrm{km}$. Pro přechod na přistávací dráhu je na krátkou dobu zapnut brzdící motor. Rychlost vyletujících plynů z reaktivního motoru je $v_\mathrm{pal} = 10^4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

a) Jaké množství paliva bude spotřebováno, jestliže po zapnutí brzdících motorů sestoupí kosmická loď z bodu A dráhy do bodu B na povrchu Měsíce?

b) Jaké množství paliva je nezbytné pro sestup kosmické lodi na povrch Měsíce, jestliže v bodě A dráhy je přidán impuls ve směru na hmotný střed Měsíce, tak aby loď přistála v bodě C?

Řešení: a) Při pohybu po kruhové dráze kolem Měsíce platí $G\frac{m_\mathrm{l} M_\mathrm{M}}{(R_\mathrm{M}+h)^2} = \frac{m_\mathrm{l} v_\mathrm{k}^2}{R_\mathrm{M}+h}$, kde $v_\mathrm{k} = \sqrt{G\frac{M_\mathrm{M}}{R_\mathrm{M}+h}}$. Po zapnutí brzdícího motoru udílejícího kosmické lodi impuls, se loď bude pohybovat po eliptické dráze s ohniskem ve středu Měsíce. Při označení v_A a v_B rychlostí kosmické lodi v bodech A a B zapíšeme zákon zachování energie a momentu hybnosti $\frac{m_\mathrm{l} v_A^2}{2} - G\frac{m_\mathrm{l} M_\mathrm{M}}{R_\mathrm{M}+h} = \frac{m_\mathrm{l} v_B^2}{2} - G\frac{m_\mathrm{l} M_\mathrm{M}}{R_\mathrm{M}}$ a $m_\mathrm{l} v_A (R_\mathrm{M} + h) = m_\mathrm{l} v_B R_\mathrm{M}$. Řešením posledně dvou uvedených rovnic nalezneme $v_A = \sqrt{2G\frac{M_\mathrm{M} R_\mathrm{M}}{(R_\mathrm{M}+h)(2R_\mathrm{M}+h)}}$ a po úpravě získáme $v_A = v_\mathrm{k}\sqrt{\frac{2R_\mathrm{M}}{2R_\mathrm{M}+h}}$. Změna rychlosti $\Delta v = v_\mathrm{k} - v_A = v_\mathrm{k}\left(1 - \sqrt{\frac{2R_\mathrm{M}}{2R_M+h}}\right) = 24\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Brzdící motor se zapíná na krátkou dobu, proto můžeme zákon zachování hybnosti soustavy kosmická loď – vyletující palivo zapsat ve

tvaru $(m_l - m_{pal})\,\Delta v = m_{pal} v_{pal}$. Úpravou obdržíme $m_{pal} = \frac{\Delta v}{v_{pal}+\Delta v} m_l$, odtud při $\Delta v \ll v_{pal}$ platí $m_{pal} \cong \frac{\Delta v}{v_{pal}} m_l \cong 29\,\mathrm{kg}$.

b) Vektor Δv_2 směřuje kolmo k vektoru v_k, proto $v_A = \sqrt{v_k^2 + \Delta v_2^2}$. Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme $\frac{m_l\left(v_k^2+\Delta v_2^2\right)}{2} - G\frac{m_l M_M}{R_M+h} = \frac{m_l v_C^2}{2} - G\frac{m_l M_M}{R_M}$ a zákona zachování momentu hybnosti $m_l v_k\,(R_M + h) = m_l v_C R_M$. Řešením posledních dvou uvedených rovnic obdržíme $\Delta v_2 = h\sqrt{\frac{g_M}{R_M+h}} = 97\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Při využití zákona zachování hybnosti $m_{pal} \cong \frac{\Delta v_2}{v_{pal}} m_l \cong$ 116 kg.

Úloha 3.24 V kterých tělesech sluneční soustavy je uložen největší moment hybnosti? Určete dráhový moment hybnosti Země, Jupitera, Saturnu a Uranu, porovnejte s momentem hybnosti Slunce. Nezbytné údaje nalezněte v `http://ads.harvard.edu/books/hsaa/`.

Řešení: Za předpokladu kruhových drah planet můžeme jejich dráhový moment hybnosti zachytit vztahem $L = mvr = m\frac{2\pi r}{T} r$. Při znalosti hmotností, poloměrů drah a oběžných dob planet můžeme vypočítat dráhové momenty hybnosti vybraných planet $L_Z = 2{,}7 \cdot 10^{40}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$, $L_J = 1{,}9 \cdot 10^{43}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$, $L_S = 7{,}8 \cdot 10^{42}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$, $L_U = 1{,}7 \cdot 10^{42}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$. U Slunce je rotační moment hybnosti $L_\odot = 1{,}1 \cdot 10^{42}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$, činící méně než zhruba 3 % celkového momentu hybnosti všech planet, přestože jeho hmotnost je 99,9 % celkové hmotnosti sluneční soustavy.

Úloha 3.25 Vypočtěte hmotnost Saturna, jestliže víme, že jeho měsíc Hyperion se pohybuje ve střední vzdálenosti od planety $1{,}48 \cdot 10^6$ km s oběžnou dobou 21,28 dne.

Řešení: Úpravou III. Keplerova zákona při zanedbání hmotnost Hyperiona $\frac{a_H^3}{T_H^2} = \frac{G}{4\pi^2} M_S$, odtud $M_S = 5{,}7 \cdot 10^{26}\,\mathrm{kg}$.

Úloha 3.26 V roce 1978 byl objeven měsíc Pluta Charón, který kolem této trpasličí planety obíhá ve střední vzdálenosti 19 640 km za dobu 6,39 dne. Určete hmotnost dvojsystému Pluto – Charón za zjednodušujícího předpokladu stejné hustoty obou těles, určete její hodnotu. V roce 1988 byly upřesněny poloměry obou těles, $R_{Pl} = 1150\,\mathrm{km}$, $R_{Ch} = 593\,\mathrm{km}$, stanovte hmotnosti jednotlivých těles.

Řešení: Platí $\frac{a_{Ch}^3}{T_{Ch}^2} = \frac{G}{4\pi^2}(M_{Pl} + M_{Ch})$, odtud $M_{Pl} + M_{Ch} = 1{,}26 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$. Za zvoleného předpokladu stejné hustoty obou těles a s ohledem na poloměry respektive objemy těles obdržíme $M_{Pl} = 1{,}2 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$, $M_{Ch} = 0{,}6 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$. Střední hustota je rovna $\bar\rho = 1{,}9 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

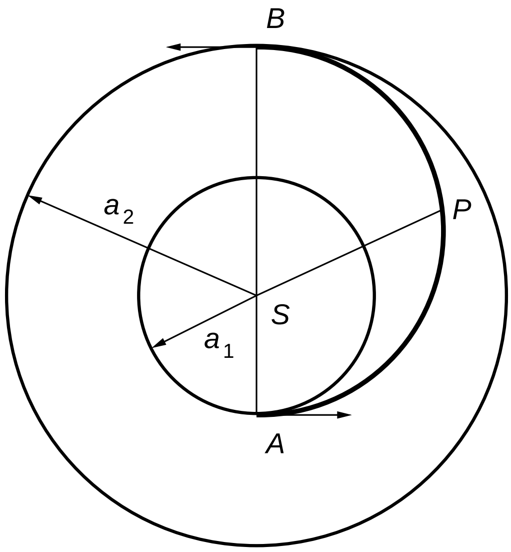
Úloha 3.27 Určete Rocheovu mez pro soustavu Země – Měsíc, stanovte její velikost.

Řešení: Rozdíl gravitačních zrychlení ve středu Měsíce a na jeho vzdálenějším okraji vyvolaných Zemí nacházející se ve vzdálenosti r_{ZM} je roven $a = \frac{2GM_Z R_M}{r_{ZM}^3}$. Pro určitou kritickou vzdálenost r_{kr} Země – Měsíc bude dostředivé zrychlení působící na povrch Měsíce rovné odstředivému zrychlení $G\frac{M_M}{R_M^2} = \frac{2GM_Z R_M}{r_{kr}^3}$. Po úpravě $r_{kr}^3 = 2\frac{M_Z}{M_M} R_M^3$ a dosazení za hmotnosti obou těles obdržíme $r_{kr} = 1{,}26\,R_Z \left(\frac{\rho_Z}{\rho_M}\right)^{\frac{1}{3}}$. Kritická vzdálenost Měsíce je rovna 1,26 násobku poloměru Země násobenému třetí odmocninou z poměru hustot Země a Měsíce, což platí v případě, že obě tělesa lze považovat za tuhá. Po dosazení hodnot hustot $\rho_Z = 5{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

a $\rho_\mathrm{M} = 3{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ dostaneme $r_\mathrm{kr} = 9\,500\,\mathrm{km}$. V případě, že obě tělesa jsou kapalná je násobným faktorem 2,4 a platí $r_\mathrm{kr} = 2{,}4\,R_\mathrm{Z}\left(\frac{\rho_\mathrm{Z}}{\rho_\mathrm{M}}\right)^{\frac{1}{3}}$ a tudíž $r_\mathrm{kr} = 18\,260\,\mathrm{km}$.

Úloha 3.28 Určete dobu letu kosmické sondy k Marsu po poloeliptické tzv. hohmannovské dráze, nazývané na počest německého matematika a fyzika Waltera Hohmanna (1880–1943).

Řešení: Nezbytná heliocentrická rychlost k dosažení Marsu má hodnotu $32{,}7\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$, Země se pohybuje po dráze kolem Slunce se střední oběžnou rychlostí $29{,}8\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$, nutná rychlost kosmické sondy při opouštění oblasti aktivity Země (sahající do vzdálenosti přibližně 930 000 km) je dána rozdílem obou rychlostí, tedy $2{,}9\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Minimální počáteční tzv. startovací rychlost z povrchu Země je určena vztahem $v = \sqrt{11{,}2^2 + 2{,}9^2} = 11{,}6\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$, kde $11{,}2\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ je hodnota druhé kosmické rychlosti. Přechod ze Země A k Marsu B se uskutečňuje po poloeliptické přechodové dráze, velikost jejíž velké poloosy a_s vypočítáme $a_\mathrm{s} = \frac{1}{2}\,(a_1 + a_2)$ v souladu s obrázkem. Excentricitu přechodové dráhy určíme ze vztahu $\varepsilon_\mathrm{s} = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}$. Dobu letu získáme z III. Keplerova zákona $\frac{T_\mathrm{s}^2}{T_1^2} = \frac{a_\mathrm{s}^3}{a_1^3}$, odkud po dosazení obdržíme hodnotu $\frac{T_\mathrm{s}}{2} = 0{,}7\,\mathrm{roku}$.



Je vhodné, aby se v okamžiku startu nacházela Země v perihéliu své dráhy, kde je rychlost planety asi o $1\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ vyšší než v aféliu a má hodnotu $30{,}4\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Vyšší startovací rychlost umožňuje zkrácení dráhy letu a také výhodnější kratší rádiové spojení s případnými přistávacími moduly v okamžiku přiblížení a přistání kosmických lodí, neboť Mars je v menší vzdálenosti od Země. Kosmické sondy nesoucí na palubě Mars Pathfinder se pohybovaly po přechodových drahách blížících se hohmannovským.

4 Záření hvězd

Úloha 4.1 Pomocí bolometrů umístěných na družicích byla zjištěna přesná hodnota solární konstanty K. Určete efektivní povrchovou teplotu Slunce, známe-li dále hodnoty poloměru $R_\odot$ a střední vzdálenosti Země od Slunce r.

Řešení: Efektivní povrchovou teplotu určíme ze vztahu $T_{\mathrm{ef}} = \left(\frac{Kr^2}{\sigma R_\odot^2}\right)^{1/4} = 5\,780\,\mathrm{K}$.

Úloha 4.2 Známe absolutní bolometrickou hvězdnou velikost a zářivý výkon Slunce. Stanovte vzájemné vztahy mezi absolutní bolometrickou hvězdnou velikostí hvězdy M_{bol} v mag, jejím zářivým výkonem L ve W, pozorovanou bolometrickou hvězdnou velikostí m_{bol} v mag, vzdáleností hvězdy r v pc a hustotou zářivého toku F_{bol} ve $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$.

Řešení: Vyjdeme z upravené Pogsonovy rovnice: $2{,}5 \log \frac{L}{L_\odot} = 4{,}75 - M_{\mathrm{bol}}$; obdržíme $\log L = 28{,}49 - 0{,}4 M_{\mathrm{bol}}$, $M_{\mathrm{bol}} = 71{,}23 - 2{,}5 \log L$, $m_{\mathrm{bol}} - M_{\mathrm{bol}} = 5 \log r - 5$, $m_{\mathrm{bol}} = -19{,}01 -$ $- 2{,}5 \log F_{\mathrm{bol}}$.

Úloha 4.3 Stanovte změnu zářivého výkonu hvězdy, jejíž poloměr se zmenší o 2% a efektivní povrchová teplota se zvětší o 2%.

Řešení: Ze Stefanova-Boltzmannova zákona vyplývá $\frac{\mathrm{d}L}{L} = 2\frac{\mathrm{d}R}{R} + 4\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{ef}}}{T_{\mathrm{ef}}}$. Pro malé změny poloměru a teploty obdržíme přibližně $\frac{\Delta L}{L} = 2\frac{\Delta R}{R} + 4\frac{\Delta T_{\mathrm{ef}}}{T_{\mathrm{ef}}}$. Podle zadání úlohy dosadíme $\frac{\Delta R}{R} = -\epsilon$ a $\frac{\Delta T_{\mathrm{ef}}}{T_{\mathrm{ef}}} = +\epsilon$ a získáme $\frac{\Delta L}{L} = 2\epsilon$. Při $\epsilon = 0{,}02$ se zářivý výkon hvězdy zvětší o 4%.

Úloha 4.4 Hvězda má efektivní povrchovou teplotu 10 000 K. Jak se zvýší zářivý výkon hvězdy, jestliže teplota naroste o 500 K?

Řešení: Ze Stefanova-Boltzmannova zákona vyplývá $L_0 \sim T_{\mathrm{ef}}^4$, při nárůstu teploty platí $L \sim \left[\left(1 + \frac{1}{20}\right) T_{\mathrm{ef}}\right]^4 \sim 1{,}22\, L_0$.

Úloha 4.5 Určete rozdíl absolutních bolometrických hvězdných velikostí dvou hvězd stejných poloměrů, jejichž efektivní povrchové teploty se liší o 10%.

Řešení: Při stejném poloměru obou hvězd platí $M_1 - M_2 = -2{,}5 \log \frac{L_1}{L_2} = -10 \log \frac{T_1}{T_2}$. Při $\frac{T_1}{T_2} = 1{,}1$ je $M_{\mathrm{bol1}} - M_{\mathrm{bol2}} = -0{,}414\,\mathrm{mag}$.

Úloha 4.6 U hvězdy α Tau Aldebarana K5 III byl zjištěn úhlový průměr $2\alpha = 0{,}021''$. Naměřená hodnota hustoty zářivého toku dopadajícího na vnější část atmosféry Země od této hvězdy je $F_{\mathrm{bol}} = 3{,}2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. Roční paralaxa $\pi = 0{,}050''$. Stanovte poloměr a efektivní povrchovou teplotu hvězdy.

Řešení: Určíme vzdálenost hvězdy $r = \frac{1}{\pi} = 20\,\mathrm{pc}$, úhlový poloměr $\alpha = 0{,}5 \cdot 10^{-7}\mathrm{rad}$. Skutečný poloměr $R = \alpha r = 3{,}09 \cdot 10^{10}\mathrm{m} = 44\, R_\odot$. Efektivní povrchová teplota je $T_{\mathrm{ef}} =$ $= \left(\frac{F_{\mathrm{bol}} r^2}{\sigma R^2}\right)^{1/4} = 3\,900\,\mathrm{K}$.

Úloha 4.7 Úhlový průměr hvězdy α CMi Procyona F5 IV-V je $2\alpha = 0{,}005''$ a roční paralaxa

$\pi = 0{,}292$". Naměřená hodnota hustoty zářivého toku $F_{\rm bol} = 1{,}6\cdot10^{-8}\,\rm W\cdot m^{-2}$. Určete poloměr a efektivní povrchovou teplotu hvězdy.

Řešení: Obdobným postupem jako u předcházejících úloh stanovíme $R = 1{,}7\,R_\odot$, $T_{\rm ef} = 6\,550\,\rm K$.

Úloha 4.8 U hvězdy α Cas Schedar K0 III s efektivní povrchovou teplotou 4 500 K, nacházející se ve vzdálenosti 70 pc byla zjištěna hustota zářivého toku $F_{\rm bol} = 1{,}65\cdot10^{-9}\,\rm W\cdot m^{-2}$. Určete L, R, $M_{\rm bol}$, $m_{\rm bol}$, modul vzdálenosti a $\lambda_{\rm max}$.

Řešení: Zářivý výkon určíme ze vztahu $L = 4\pi r^2 F_{\rm bol} = 9{,}67\cdot10^{28}\,\rm W = 251\,L_\odot$. Poloměr hvězdy stanovíme ze vztahu $R = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T_{\rm ef}^4}\right)^{1/2}$. Absolutní bolometrickou hvězdnou velikost stanovíme ze vztahu $\log L = 0{,}4\,(4{,}75 - M_{\rm bol})$, odkud $M_{\rm bol} = -1{,}24\,\rm mag$. Pozorovanou bolometrickou hvězdnou velikost získáme z upravené Pogsonovy rovnice $m_{\rm bol} = M_{\rm bol} + 5\log r - 5 = 2{,}99\,\rm mag$. Modul vzdálenosti je $m_{\rm bol} - M_{\rm bol} = 4{,}23\,\rm mag$. Vlnová délka hodnoty maximální intenzity záření zjištěná z Wienova posunovacího zákona je $\lambda_{\rm max} = 644\,\rm nm$.

Úloha 4.9 Pro hvězdu nacházející se ve vzdálenosti $r = 10{,}4\,\rm pc$ byla zjištěna hustota zářivého toku $F_{\rm bol} = 1\cdot10^{-8}\,\rm W\cdot m^{-2}$ a efektivní povrchová teplota $T = 4\,800\,\rm K$. Určete úhlový průměr hvězdy a zvažte, zda ho lze současnými interferometrickými metodami změřit. Odhadněte bolometrickou korekci, jestliže absolutní vizuální hvězdná velikost je $M_{\rm V} = 1{,}03\,\rm mag$. Údaje odpovídají hvězdě β Gem Pollux K0 III.

Řešení: Nejprve určíme zářivý výkon hvězdy $L = 4\pi r^2 F_{\rm bol} = 1{,}5\cdot10^{28}\,\rm W$, tedy $L = 39\,L_\odot$. Dále stanovíme poloměr hvězdy $R = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T_{\rm ef}^4}\right)^{1/2}$ vyjádřeno v jednotkách poloměru Slunce $R = 9\,R_\odot$. Úhlový průměr $2\alpha = 2\frac{R}{r} = 3{,}9\cdot10^{-8}\,\rm rad$, tedy 0,008". Hodnota je měřitelná současnými prostředky. Ze vztahu $\log L = 0{,}4\,(4{,}75 - M_{\rm bol})$ nalezneme $M_{\rm bol} = 0{,}77\,\rm mag$, $\mathrm{BC} = M_{\rm bol} - M_{\rm V} = -0{,}26\,\rm mag$, což odpovídá tabulkovým hodnotám.

Úloha 4.10 U Vegy byl zjištěn úhlový průměr $2\alpha = 0{,}00324$" a hustota zářivého toku $F_{\rm bol} = 2{,}84\cdot10^{-8}\,\rm W\cdot m^{-2}$. Její vzdálenost je $r = 7{,}8\,\rm pc$. Stanovte poloměr, efektivní povrchovou teplotu a zářivý výkon.

Řešení: $\alpha = \frac{R}{r}$, skutečný poloměr $R = \alpha r = 1{,}89\cdot10^9\,\rm m$, tedy $2{,}7\,R_\odot$. Efektivní povrchovou teplotu získáme ze vztahu $T_{\rm ef} = \left(\frac{F_{\rm bol} r^2}{\sigma R^2}\right)^{1/4} = 9\,500\,\rm K$. Zářivý výkon stanovíme ze vzorce $L = 4\pi r^2 F_{\rm bol} = 2{,}07\cdot10^{28}\,\rm W = 54\,L_\odot$.

Úloha 4.11 Efektivní povrchová teplota Vegy je 9 500 K, její poloměr $2{,}7\,R_\odot$. Vypočtěte zářivý výkon hvězdy a její absolutní bolometrickou hvězdnou velikost.

Řešení: Využijeme řešení předchozích úloh, $L = 54\,L_\odot$. Absolutní bolometrickou hvězdnou velikost stanovíme ze vztahu $\log L = 0{,}4\,(4{,}75 - M_{\rm bol})$, $M_{\rm bol} = 0{,}42\,\rm mag$.

Úloha 4.12 Interferometrickou metodou byl určen úhlový průměr u hvězdy α Boo Arktura K1 III na 0,021". Zjištěná hodnota roční paralaxy je $\pi = 0{,}089$" a hustota zářivého toku $F_{\rm bol} = 4{,}9\cdot10^{-8}\,\rm W\cdot m^{-2}$. Stanovte poloměr a efektivní povrchovou teplotu Arktura.

Řešení: $R = 25\,R_\odot$, $T_{\rm ef} = 4\,300\,\mathrm{K}$.

Úloha 4.13 U Siria B byla zjištěna pozorovaná bolometrická hvězdná velikost $m_{\rm bol} = 6{,}0\,\mathrm{mag}$. Z výsledků měření družice Hipparcos byla stanovena roční paralaxa $\pi = 0{,}379''$. Určete absolutní bolometrickou hvězdnou velikost hvězdy.

Řešení: Dosadíme do vztahu $M_{\rm bol} = m_{\rm bol} + 5 + 5\log\pi$, $M_{\rm bol} = 8{,}9\,\mathrm{mag}$.

Úloha 4.14 Červený trpaslík spektrální třídy M4 Ve má efektivní povrchovou teplotu 3200 K a absolutní vizuální hvězdnou velikost $M_{\rm V} = 13{,}4\,\mathrm{mag}$. Pomocí v tabulkách nalezené bolometrické korekce $\mathrm{BC} = -2{,}3\,\mathrm{mag}$ nalezněte zářivý výkon a poloměr hvězdy.

Řešení: $M_{\rm bol} = \mathrm{BC} + M_{\rm V} = 11{,}1\,\mathrm{mag}$. Zářivý výkon v jednotkách zářivého výkonu Slunce stanovíme podle vztahu $\log L = 0{,}4(4{,}75 - 11{,}1) = -2{,}54$, tedy $L = 0{,}003\,L_\odot$, $L = 1{,}2 \cdot 10^{24}\,\mathrm{W}$. Poloměr určíme ze vztahu $R = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T_{\rm ef}^4}\right)^{1/2} = 1{,}2 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$, tedy $0{,}17\,R_\odot$. Údaje v podstatě odpovídají Barnardově hvězdě, která má největší známý vlastní pohyb 10,34" za rok. Byla objevena E. E. Barnardem roku 1916.

Úloha 4.15 Rozdělení energie ve spojitém spektru Slunce G2 V je blízké rozložení intenzity záření černého tělesa s teplotou 5 800 K. Proč rozložení intenzity záření ve spojitém spektru Vegy A0 V příliš neodpovídá rozložení intenzity záření černého tělesa s teplotou 9 500 K?

Řešení: Fotosféru Slunce můžeme považovat v prvním přiblížení za šedou (šedý zářič). Zdrojem neprůzračnosti je H^- absorbující procházející záření u všech vlnových délek téměř stejně, neselektivně. Proto lze zjednodušeně pokládat spojité záření Slunce za téměř odpovídající zákonům záření černého tělesa (ZZČT). U Vegy je základním zdrojem absorpce v atmosféře neutrální vodík, jehož absorpce je výrazně selektivní. Spojité záření tak přichází z odlišných hloubek o různé teplotě, intenzita záření spojitého spektra se tudíž odlišuje od planckovské intenzity. Ta je dále narušena balmerovským skokem, jehož velikost roste s teplotou od spektrální třídy G k A, u Vegy je mnohem větší než u Slunce.

Úloha 4.16 Pod rozdělením energie ve spektru obvykle rozumíme rozdělení intenzity podle vlnových délek. Na jaké vlnové délce se však nachází maximum v rozdělení intenzity podle frekvence? Jako příklad použijeme Slunce, předpokládejme, že vyzařuje jako absolutní černé těleso s teplotou 5 780 K.

Řešení: V prvním případě, rozdělení podle vlnových délek I_λ, má Wienův posunovací zákon tvar $\lambda_{\max}T = 0{,}0029$. Křivka, zachycující intenzitu jako funkci vlnové délky, dosahuje maxima při $\lambda_{\max} = 500\,\mathrm{nm}$. Méně častější je vyjádření rozdělení intenzity podle frekvence $I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}$. Z podmínky $\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}\nu}$ dostaneme $\nu = \frac{2{,}83kT}{h}$, odkud po úpravě obdržíme $\lambda_{\max}T = 0{,}0051$, což dává polohu maxima $\lambda_{\max} = 800\,\mathrm{nm}$. Tedy obě vlnové délky se výrazně odlišují.

Úloha 4.17 Určete úbytek hmotnosti Slunce prostřednictvím slunečního větru. Předpokládejte sféricky symetrické šíření slunečního větru meziplanetárním prostorem a výpočet proveďte za předpokladu, že veškerá hmotnost ze Slunce prochází sférou ve vzdálenosti 1 AU Je zadáno $v = 500\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $r = 1\,\mathrm{AU}$, $n = 7$ protonů.$\mathrm{cm^{-3}}$.

Řešení: Sférickou vrstvou o poloměru r projde $\mathrm{d}M = \rho \mathrm{d}V = (nm_{\mathrm{H}})(4\pi r^2 v \mathrm{d}t)$. Zmenšení hmotnosti lze vyjádřit $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 n m_{\mathrm{H}} = 4\pi r^2 \rho v$. Numerickým dosazením obdržíme úbytek hmotnosti Slunce $3 \cdot 10^{-14}\, M_\odot \cdot \mathrm{rok}^{-1}$.

Úloha 4.18 Vztah hmotnost - zářivý výkon pro hvězdy hlavní posloupnosti s velkou hmotností lze přibližně vyjádřit vztahem $\log \frac{L}{L_\odot} \cong 0{,}781 + 2{,}760 \log \frac{M}{M_\odot}$, kde M je počáteční hmotnost. Úbytek hmotnosti hvězd v jednotkách $M_\odot \cdot \mathrm{rok}^{-1}$ lze zachytit vztahem $\log \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \cong -$ -12,76 + $1{,}3 \log \frac{L}{L_\odot}$. Doba pobytu na hlavní posloupnosti je dána vztahem $\log \tau_{\mathrm{HP}} \cong 7{,}719 -$ - $0{,}655 \log \frac{M}{M_\odot}$. Určete úbytek hmotnosti hvězdy na hlavní posloupnosti, jestliže počáteční hmotnosti hvězd byly $25\, M_\odot$, $60\, M_\odot$, $120\, M_\odot$.

Řešení: Nejprve určíme dobu pobytu τ_{HP} hvězd na hlavní posloupnosti; postupně je tato doba pro jednotlivé hvězdy $6{,}4 \cdot 10^6$ roků, $3{,}9 \cdot 19^6$ roků a $2{,}3 \cdot 10^6$ roků. Dále stanovíme $\log \frac{L}{L_\odot}$ – 4,639, 5,689, 6,520. Následuje výpočet úbytku hmotnosti vyjádřený v jednotkách $M_\odot \cdot \mathrm{rok}^{-1}$ – $1{,}9 \cdot 10^{-7}$, $4{,}3 \cdot 10^{-6}$, $5{,}2 \cdot 10^{-5}$, což dává celkové úbytky hmotnosti $1{,}18\, M_\odot$, $17\, M_\odot$ a $119\, M_\odot$, v procentech 5%, 28% a 99% původní hmotnosti.

Úloha 4.19 V jaké vzdálenosti od Slunce se nachází fokusační bod F gravitační čočky? Mohou Slunce respektive Proxima Centauri sloužit jako gravitační čočky?

Řešení: Z obrázku je zřejmé, že $\tan\theta = \frac{b}{F}$, $\Rightarrow F = \frac{b}{\tan\theta}$. V přiblížení slabého gravitačního pole s ohledem na malý úhel θ obdržíme $F \approx \frac{b}{\theta} \approx \frac{b^2}{R_{\mathrm{g}}} \approx \frac{b^2c^2}{2GM}$ při $\theta = \frac{2R_{\mathrm{g}}}{b}$. Dále při $b \approx R \Rightarrow F \approx \frac{c^2R^2}{2GM}$. Příkladně pro Slunce $F \approx 1{,}7 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}$. Protože $ZS \approx l = 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$, potom $F \gg l$. Tudíž ze Země nemůžeme pozorovat efekt gravitační čočky v gravitačním poli Slunce. Nejbližší hvězda Proxima Centauri se od Země nachází ve vzdálenosti $l \approx 4 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m} \gg F$. Libovolná z hvězd tak může sloužit jako gravitační čočka. Je však nutné, aby zdroj záření hvězda – čočka a pozorovatel se nacházeli na jedné přímce. V rámci OTR, silném gravitačním poli, je ohnisková vzdálenost určována z Einsteinova vztahu $F \approx \frac{b^2}{2R_{\mathrm{g}}} \approx \frac{b^2c^2}{4GM}$. Pro Slunce $b \approx R$ obdržíme $F \approx 8{,}3 \cdot 10^{13}\,\mathrm{m}$. Proto zůstávají v platnosti předchozí závěry pro slabé gravitační pole.

Úloha 4.20 Hvězda 18 Sco (HD 146 233) je svými charakteristikami velmi podobná našemu Slunci. Její zářivý výkon je o 5 % větší než sluneční, zatímco efektivní teplota je o 90 K nižší než sluneční. Určete poloměr hvězdy.

Řešení: Při $L_\odot = 3{,}86 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ a teplotě Slunce $T_\odot = 5\,777\,\mathrm{K}$ stanovíme zářivý výkon a teplotu hvězdy 18 Sco takto $L_{\mathrm{Sco}} = 4{,}05 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ a teplota $T_{\mathrm{Sco}} = 5\,687\,\mathrm{K}$. Poloměr hvězdy určíme ze vztahu $R = \left(\frac{L_{\mathrm{Sco}}}{4\pi\sigma T^4_{\mathrm{ef,\,Sco}}}\right)^{1/2} = 7{,}4 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$.

Úloha 4.21 Nejjasnější hvězda na obloze Sirius A se nachází ve vzdálenosti $r = 2{,}64\,\mathrm{pc}$. Bolometrickým měřením na družicích obíhajících kolem Země byla naměřena od této hvězdy hustota zářivého toku $1{,}33 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. Její teplota je 10 300 K, určete poloměr.

Řešení: Nejprve stanovíme zářivý výkon Siria A, $L = 4\pi r^2 F_{\mathrm{bol}} = 1{,}11 \cdot 10^{28}\,\mathrm{W}$. Poloměr hvězdy určíme ze vztahu $R = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T^4_{\mathrm{ef}}}\right)^{1/2} = 1{,}18 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$.

Úloha 4.22 Hvězda α Cen A má roční paralaxu $\pi = 0{,}742''$, interferometricky zjištěný úhlový poloměr je $\alpha = 4{,}3 \cdot 10^{-3}''$. Bolometrem na družici obíhající kolem Země byla zjištěna hustota zářivého toku od této hvězdy $F_{\mathrm{bol}} = 2{,}7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. Určete efektivní povrchovou teplotu hvězdy.

Řešení: Ze vztahů $r = 1/\pi$ a $R = \alpha r$ určíme poloměr hvězdy $R = 8{,}7 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$, tedy $1{,}25\,R_{\odot}$. Dále stanovíme zářivý výkon hvězdy $L = 4\pi r^2 F_{\mathrm{bol}} = 5{,}9 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W} = 1{,}53\,L_{\odot}$. Konečně $T_{\mathrm{ef}} = \left(\frac{L}{4\pi\sigma R^2}\right)^{1/4} = 5\,750\,\mathrm{K}$.

Úloha 4.23 U hvězdy α Cen A byl naměřen pokles hustoty zářivého toku o 1 %. O kolik stupňů poklesla efektivní povrchová teplota α Cen A, jestliže původní teplota dosahovala 5 790 K?

Řešení: Efektivní teplotu hvězdy můžeme vyjádřit vztahem $T_{\mathrm{ef}} = \left(\frac{4\pi r^2 F_{\mathrm{bol}}}{4\pi R^2 \sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{r^2 F_{\mathrm{bol}}}{R^2 \sigma}\right)^{1/4}$. Předpokládáme, že r, R jsou konstantní, tudíž $T_{\mathrm{ef}} = \mathrm{konst.} F_{\mathrm{bol}}^{1/4}$. Pro malé změny platí $\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{ef}}}{T_{\mathrm{ef}}} = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{bol}}}{F_{\mathrm{bol}}}$, $\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{ef}}}{T_{\mathrm{ef}}} = 0{,}0025$. Odpovídající změna teploty je $\mathrm{d}T_{\mathrm{ef}} = 0{,}0025\,T_{\mathrm{ef}} = 14\,\mathrm{K}$.

Úloha 4.24 Hvězda Altair se nachází ve vzdálenosti $r = 5{,}14\,\mathrm{pc}$, její úhlový poloměr je $\alpha = 0{,}8 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{rad}$, efektivní teplota $T_{\mathrm{ef}} = 7\,680\,\mathrm{K}$. Na základě těchto údajů lze vypočítat zářivý výkon hvězdy. Můžeme ověřit správnost vypočítané hodnoty zářivého výkon bolometrickým měřením hustoty zářivého toku, jestliže prahová citlivost bolometru umístěného na družici k určení hustoty zářivého toku je $10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$?

Řešení: Nejprve stanovíme poloměr hvězdy $R = \alpha r = 1{,}3 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m} = 1{,}9\,R_{\odot}$. Propočítaný zářivý výkon hvězdy je $4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{ef}}^4 = 4{,}2 \cdot 10^{27}\,\mathrm{W}$. Odtud vypočítaná hustota zářivého toku $F_{\mathrm{bol}} = 1{,}3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$, bolometr má dostatečnou prahovou citlivost.

Úloha 4.25 První objevený hnědý trpaslík Gl 229 B se vyznačuje roční paralaxou $\pi = 0{,}175''$. Maximum intenzity vyzařování jeho spojitého spektra připadá na vlnovou délku $2{,}9\,\mu\mathrm{m}$, poloměr je $0{,}94\,R_{\mathrm{J}}$. Odhadněte, jaká musí být minimální prahová citlivost bolometru umístěného na družici obíhající Zemi k detekci hustoty zářivého toku od tohoto hnědého trpaslíka.

Řešení: Při paralaxe $\pi = 0{,}175''$ je vzdálenost hvězdy $r = 5{,}7\,\mathrm{pc}$. Teplotu určíme z Wienova posunovacího zákona $T = b/\lambda = 1000\,\mathrm{K}$. Zářivý výkon $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{ef}}^4 = 3{,}2 \cdot 10^{21}\,\mathrm{W}$. Požadovaná minimální prahová citlivost je $F_{\mathrm{bol}} = \frac{L}{4\pi r^2} = 8{,}2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$.

Úloha 4.26 Předpokládejte znalost zářivého výkonu $3{,}86 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ a absolutní bolometrickou hvězdnou velikost Slunce $M_{\mathrm{bol}} = 4{,}75\,\mathrm{mag}$. Stanovte vzdálenost, do které by bylo možné pozorovat lidským zrakem Slunce při jeho hypotetickém vzdalování od Země. Odhadněte počet fotonů n dopadajících do oka za jednu sekundu. Pro jednoduchost předpokládejte, že všechny fotony mají stejnou vlnovou délku $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$, plochu lidského oka zvolte $1\,\mathrm{cm}^2$.

Řešení: Dosazením do vztahu $m - M = 5 \log r - 5$, $m = 6\,\mathrm{mag}$ určíme hledanou vzdálenost $r = 17{,}8\,\mathrm{pc}$. Odtud je hustota zářivého toku $F_{\mathrm{bol}} = \frac{L}{4\pi r^2} = 10^{-10}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. Při předpokládané ploše lidského oka $P = 1\,\mathrm{cm}^2$ je celková přijímaná energie za jednu sekundu $E = F_{\mathrm{bol}} P = 10^{-14}\,\mathrm{J}$. Energie jednoho fotonu je $\epsilon = h\nu = hc/\lambda = 3{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$. Počet fotonů je tak roven $n = E/\epsilon = 2{,}8 \cdot 10^{4}\,\mathrm{s^{-1}}$.

5 Základy hvězdné spektroskopie

Úloha 5.1 Vyjádřete energii fotonů [eV] charakterizujících
a) Lymanovu hranu o $\lambda = 91{,}2\,\mathrm{nm}$
b) nebulární čáru O III $\lambda = 500{,}7\,\mathrm{nm}$
c) čáru H_α Balmerovy série vodíku $\lambda = 656{,}3\,\mathrm{nm}$
d) emisní čáru NH_3 $\lambda = 1{,}3\,\mathrm{cm}$.
e) čáru neutrálního vodíku $\lambda = 21\,\mathrm{cm}$.

Řešení: $2{,}17 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} = 13{,}55\,\mathrm{eV}$, $2{,}46\,\mathrm{eV}$, $1{,}88\,\mathrm{eV}$, $9{,}49 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV}$, $5{,}87 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV}$.

Úloha 5.2 Vypočtěte pět nejnižších energetických hladin atomu vodíku. Ve spektrech kvasarů je zpravidla dominantní spektrální čára L_α, vznikající při přechodu z energetické hladiny $n = 2$ na hladinu $n = 1$. Určete její vlnovou délku.

Řešení: $-13{,}583\,\mathrm{eV}$, $-3{,}390\,\mathrm{eV}$, $-1{,}511\,\mathrm{eV}$, $-0{,}849\,\mathrm{eV}$, $-0{,}543\,\mathrm{eV}$; $121{,}6\,\mathrm{nm}$.

Úloha 5.3 Stanovte vlnovou délku světla vyzářeného atomem vodíku při přechodu z energetické hladiny $n = 6$ na hladinu $n = 2$. O jakou sérii a barvu jde?

Řešení: Balmerova série, čtvrtá čára H_δ s $\lambda = 410{,}2\,\mathrm{nm}$, fialová barva.

Úloha 5.4 Lze z povrchu Země pozorovat čáry mezihvězdného vodíku vznikající při přechodu z desáté na devátou energetickou hladinu?

Řešení: Dosadíme do vztahu $\lambda = \frac{hc}{E_{10} - E_9} = 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$, čáry leží v submilimetrovém pásmu v infračervené oblasti spektra a nemůžeme je z povrchu Země pozorovat.

Úloha 5.5 Jakou spektrální čáru můžeme očekávat ve viditelné části spektra protuberance při excitaci vodíkových atomů elektrony o energii $2{,}0\,\mathrm{eV}$?

Řešení: $\lambda \geq \frac{hc}{E} = 621{,}5\,\mathrm{nm}$, podmínku splňuje čára Balmerovy série H_α o vlnové délce $\lambda = 656{,}28\,\mathrm{nm}$, pro kterou platí $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)$.

Úloha 5.6 Vypočítejte minimální energii elektronů, které jsou schopny excitovat kyslíkové ionty O III na první B – $^1\mathrm{D}_2$ a druhou C – $^1\mathrm{S}_0$ metastabilní energetickou hladinu, na které mohou atomy v astrofyzikálních podmínkách setrvávat sekundy až minuty. Víme, že zakázaná čára vznikající při přechodu C→B má vlnovou délku [O III] $\lambda = 436{,}3\,\mathrm{nm}$ a při přechodu z B→A [O III] $\lambda = 500{,}7\,\mathrm{nm}$. Jaká je potřebná kinetická teplota T_k k tomu, aby se atomy dostaly na energetické metastabilní hladiny B a C?

Řešení: $E = h\frac{c}{\lambda}$, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT_\mathrm{k}$, přechod A→B, $E = 3{,}9 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$, $T_\mathrm{k} \cong 19\,000\,\mathrm{K}$, přechod A→C, $E = 8{,}5 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$, $T_\mathrm{k} \cong 40\,000\,\mathrm{K}$.

Úloha 5.7 Prvek helium byl poprvé pozorován francouzským astronomem P. J. C. Jansenem 18. srpna 1868 v Indii ve spektru protuberance v průběhu úplného zatmění Slunce. Žlutá spektrální čára, tehdy označená D_3, o vlnové délce $587{,}6\,\mathrm{nm}$, se nacházela v blízkosti čar sodíku D_1 a D_2. Ve skutečnosti je tripletem čar $587{,}562\,\mathrm{nm}$, $587{,}565\,\mathrm{nm}$ a $587{,}599\,\mathrm{nm}$, rozlišitelným

pouze vysokodisperzními spektrografy. Stanovte energii vyšší energetické hladiny, z níž při přechodu na nižší hladinu 20,88 eV čára vzniká.

Řešení: 22,98 eV.

Úloha 5.8 Vypočítejte nejpravděpodobnější rychlost atomů vodíku a železa ve sluneční koróně při teplotě 10^6 K. Porovnejte tuto rychlost s parabolickou rychlostí u Slunce.

Řešení: $v_\mathrm{m} = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$, $128\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $17\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $v_\mathrm{p} = \left(2G\frac{M_\odot}{R_\odot}\right)^{1/2} = 617\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Hodnoty rychlostí atomů vodíku a železa jsou nižší než hodnota únikové rychlosti Slunce, proto zůstávají v koróně.

Úloha 5.9 Dokažte, že gravitační pole Slunce nemůže udržet elektrony ve sluneční koróně, která má teplotu 10^6 K. Zdůvodněte, proč však přesto zůstávají v koróně Slunce.

Řešení: $v_\mathrm{m} = \left(\frac{2kT}{m_e}\right)^{1/2} = 5500\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $v_\mathrm{p} = \left(2G\frac{M_\odot}{R_\odot}\right)^{1/2} = 617\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, coulombovská přitažlivá síla elektronů k protonům způsobuje, že zůstávají v koróně Slunce.

Úloha 5.10 Kolik vrypů na mm musí mít difrakční mřížka, aby ve spektru II. řádu bylo možné rozlišit čáry sodíkového dubletu, u kterých jsou vlnové délky 589,0 nm a 589,6 nm? Stanovte lineární vzdálenost mezi uvedenými čarami na spektrogramu ve spektru I. řádu získaného mřížkou s 600 vrypy na mm, jestliže ohnisková vzdálenost kamery je $f = 0{,}8$ m?

Řešení: $\lambda = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = 589{,}3\,\mathrm{nm}$, $N = \frac{\lambda}{m\Delta\lambda} = 491$. Hledaná vzdálenost je $\Delta x = x_2 -$ $- x_1$, $x_1 = f\,\mathrm{tg}\,\alpha_1$, $x_2 = f\,\mathrm{tg}\,\alpha_2$, úhly určíme $\sin\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{d}$, $\sin\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{d}$. Dosazením dostaneme $\Delta x = 0{,}36\,\mathrm{mm}$.

Úloha 5.11 Ve spektrech některých obrů spektrální třídy K pozorujeme výrazné čáry lithia s vlnovými délkami 670,776 nm a 670,791 nm. Patří přechodům $2\,^2P_{1/2} \to 2\,^2S_{1/2}$, $2\,^2P_{3/2} \to 2\,^2S_{1/2}$. Kolik vrypů na 1 mm musí mít difrakční mřížka s šířkou $D = 4$ cm, aby umožňovala v prvním řádu rozlišit uvedené vlnové délky?

Řešení: Počet vrypů určíme dosazením do vztahu $\frac{1}{d} = \frac{\lambda}{Dm\Delta\lambda} = 1120\,\mathrm{mm^{-1}}$.

Úloha 5.12 Určete, který z posuvů spektrálních čar, gravitační či dopplerovský vyvolaný rotací u Slunce převládá. Rovníková rychlost převracející vrstvy Slunce je $1{,}93\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, k zjištění posuvů použijte čáru H_β o vlnové délce $\lambda = 486{,}1$ nm.

Řešení: Velikost gravitačního rudého posuvu $\Delta\lambda = \frac{GM}{c^2R}\lambda = 10^{-3}$ nm porovnáme s velikostí dopplerovského posuvu $\Delta\lambda = \frac{v}{c}\lambda = 3\cdot 10^{-3}$ nm.

Úloha 5.13 Při zvláště přesných měřeních radiálních rychlostí je třeba provádět rovněž opravu na pohyb Země kolem hmotného středu soustavy Země – Měsíc, tzv. barycentra. Střední rychlost tohoto pohybu je $12{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Porovnejte velikost této opravy s relativistickou korekcí na příčný kvadratický Dopplerův jev při změnách rychlosti o
a) $30\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$
b) $300\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Řešení: Pro příčný Dopplerův jev, při zanedbání členů s vyššími mocninami, platí vztah $\lambda' = \dfrac{\lambda}{1+\frac{1}{2}\frac{\nu^2}{c^2}}$, předpokládáme platnost vztahu $\nu = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$.

a) $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2}\frac{\nu^2}{c^2} = 0{,}5\cdot 10^{-8}$, $\nu = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$,

b)$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0{,}5\cdot 10^{-6}$, $\nu = 150\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

V prvním případě příčný Dopplerův jev nemusíme uvažovat, v druhém ano.

Úloha 5.14 Ve vysocedisperzním spektru Slunce u vodíkové čáry H_β o vlnové délce $\lambda =$ $= 486{,}133\,\mathrm{nm}$ byla nalezena další čára o vlnové délce $\lambda = 485{,}998\,\mathrm{nm}$. Předpokládejme, že tato čára patří izotopu vodíku. Určete o jaký izotop jde.

Řešení: Z atomové fyziky je znám vztah $\lambda_\mathrm{H} R_\mathrm{H} = \lambda_\mathrm{D} R_\mathrm{D}$, $R = \dfrac{R_\infty}{1+\frac{m_e}{M}}$. Při zanedbání malých veličin dostaneme $1 - \frac{\lambda_\mathrm{H}}{\lambda_\mathrm{D}} = \frac{m_e}{M_\mathrm{D}} - \frac{m_e}{M_\mathrm{H}}$. Dosadíme $\frac{m_e}{M_\mathrm{H}} = \frac{1}{1835}$ a obdržíme $\frac{m_e}{M_\mathrm{D}} = \frac{1}{3727}$, tedy $\frac{M_\mathrm{D}}{M_\mathrm{H}} \cong 2$, izotopem je deuterium.

Úloha 5.15 Nalezněte šířku spektrální čáry Fe XIV o vlnové délce $\lambda = 530{,}3\,\mathrm{nm}$ pocházející ze sluneční emisní koróny o teplotě $10^6\,\mathrm{K}$.

Řešení: $\Delta\lambda \cong 0{,}08\,\mathrm{nm}$.

Úloha 5.16 Stanovte šířku $\Delta\lambda$ pro teplotní rozšíření čáry K Ca II o vlnové délce $\lambda = 393{,}4\,\mathrm{nm}$ pro atmosféry červených obrů s teplotami 3 000 K, 5 000 K. Diskutujte výsledek s ohledem na význam teploty pro rozšíření této čáry. Jak ovlivňuje velikost šířky spektrálních čar rozdílná hmotnost jednotlivých atomů např. u vodíku, helia, vápníku a železa?

Řešení: $\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$, jednotlivé hodnoty šířek $\Delta\lambda$ se liší členem $T^{1/2}$. Pro čáru K CaII a jednotlivé teploty dostaneme $\Delta\lambda_1 = 0{,}0029\,\mathrm{nm}$, $\Delta\lambda_2 = 0{,}0037\,\mathrm{nm}$. Při fyzikální podmínkách ve fotosférách je teplotní rozšíření zpravidla dominantní. S rostoucí hmotností atomů klesá šířka čar.

Úloha 5.17 Určete šířku spektrální čáry kyslíku O III s vlnovou délkou $\lambda = 500{,}7\,\mathrm{nm}$, kterou můžeme identifikovat ve spektru plynné emisní mlhoviny o teplotě 10 000 K.

Řešení: $\Delta\lambda = 0{,}01\,\mathrm{nm}$.

Úloha 5.18 Vypočítejte šířku čáry H_α, znáte-li že pro rozšíření spektrálních čar srážkami platí $\Delta\lambda \cong \frac{\lambda^2}{c}\frac{1}{\pi\Delta t_0} \cong \frac{\lambda^2}{c}\frac{n\sigma}{\pi}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$. Předpokládáme vodíkové atomy ve sluneční fotosféře při teplotě 5 780 K a hustotě atomů $1{,}5\cdot 10^{23}\,\mathrm{m^{-3}}$, $\sigma = 3{,}6\cdot 10^{-20}\,\mathrm{m^2}$.

Řešení: Pro vodíkovou čáru H_α je $\Delta\lambda \cong 2{,}4\cdot 10^{-5}\,\mathrm{nm}$, což je hodnota velmi malá, srovnatelná s přirozeným rozšířením spektrální čáry. Při narůstání hustoty atomů ve fotosféře se srážkové rozšíření zvyšuje.

Úloha 5.19 Odhadněte pomocí výpočtu minimální šířku Fraunhoferových čar vodíku ve

spektru Slunce. Porovnejte vypočtené šířky spektrálních čar s tabelovanými údaji o ekvivalentních šířkách nejmohutnějších čar v následující tabulce. Přitom mějte na paměti definici ekvivalentní šířky.

λ [nm]	ekvivalentní šířka [nm]	prvek, iont
393,3682	2,0253	Ca II
396,8492	1,5467	Ca II
656,2808	0,4020	H_α
486,1342	0,3680	H_β
410,1748	0,3133	H_δ
434,0475	0,2855	H_γ
518,3619	0,1584	Mg I
385,9922	0,1554	Fe I
422,6740	0,1476	Ca I
517,2698	0,1259	Mg I
404,5825	0,1174	Fe I
438,3557	0,1008	Fe I
516,7327	0,0935	Mg I
388,6294	0,0920	Fe I
440,4761	0,0898	Fe I
390,5532	0,0816	Si I
406,3605	0,0787	Fe I
588,9973	0,0752	Na I
407,1749	0,0723	Fe I
589,5940	0,0564	Na I

Řešení: Vedle jiných příčin je rozhodující rozšíření čar vyvolané tepelným pohybem atomů. Při teplotě 5 780 K je rychlost vodíkových atomů asi $12\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Vlnová délka 500 nm viditelného světla se při takové rychlosti posouvá o $\Delta\lambda = \lambda\frac{v}{c} \cong 0{,}02\,\mathrm{nm}$. Šířka čáry je tak $2\Delta\lambda \cong 0{,}04\,\mathrm{nm}$. Ve skutečnosti jsou však balmerovské čáry mnohem širší než činí tento hrubý odhad, důležité je rozšíření křídel čar srážkami. Jednotlivé části zejména mohutných spektrálních čar vznikají v různých vrstvách atmosféry.

Úloha 5.20 Doba existence elektronu v prvním a druhém excitovaném stavu u atomu vodíku je přibližně $\Delta t = 10^{-8}\,\mathrm{s}$. Určete velikost přirozené šířky čáry H_α o vlnové délce $\lambda = 656{,}3\,\mathrm{nm}$.

Řešení: Dosazením obdržíme $\Delta\lambda \cong \frac{\lambda^2}{2\pi c}\left(\frac{1}{\Delta t_1} + \frac{1}{\Delta t_2}\right) \cong 4{,}6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{nm}$.

Úloha 5.21 Spektrální čára o vlnové délce $\lambda = 532{,}0\,\mathrm{nm}$ vzniká jako výsledek přechodu mezi dvěma nabuzenými stavy atomu, jejichž střední doba života je rovna 12 ns a 20 ns. Určete přirozenou šířku čáry $\Delta\lambda$.

Řešení: $\Delta\lambda = 2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{nm}$.

Úloha 5.22 Určete přirozenou šířku spektrální čáry pro $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$ a konstantu útlumu $\gamma = 10^8\,\mathrm{s^{-1}}$.

Řešení: $\Delta\nu = \frac{\gamma}{2}$, $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu = \frac{\lambda^2\gamma}{2c} = 10^{-5}\,\text{nm}$.

Úloha 5.23 Nechť teoreticky uvažovaná hvězda spektrální třídy B0 V má periodu vlastní rotace $P = 2\,\text{dny}$. Nalezněte charakteristickou šířku čáry ve spektru této hvězdy ve vizuální oblasti spektra pro čáru H_β, $\lambda = 486{,}1\,\text{nm}$, předpokládáme-li, že osa rotace je kolmá k zornému paprsku. Uvedená hvězda má poloměr $7{,}5\,R_\odot$.

Řešení: Rotační obvodová rovníková rychlost je rovna $v_r = \frac{2\pi R}{P} = 200\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. Rozšíření čáry podmíněné rotací je dáno vztahem $\Delta\lambda_r = \lambda\frac{v_r}{c}$, po dosazení obdržíme $\Delta\lambda_r = 0{,}3\,\text{nm}$.

Úloha 5.24 Velmi široké čáry způsobené rotačním rozšířením pozorujeme u hvězd spektrální třídy A. Jestliže pro čáru H_γ o vlnové délce 434,0 nm jedné hvězdy byla zjištěna šířka čáry $\Delta\lambda_r = 0{,}08\,\text{nm}$, jakých hodnot dosahuje $v_\text{rot}\sin i$?

Řešení: $\Delta\lambda_r = \frac{\lambda}{c}v_\text{rot}\sin i$, $v_\text{rot}\sin i = 55\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Úloha 5.25 Jaký vliv má ztemnění na okraji disku hvězdy na rozšíření spektrálních čar vyvolaném rotací hvězdy?

Řešení: Okrajové ztemnění zmenšuje rozšíření čar spojené s rotací hvězdy.

Úloha 5.26 Spektrograf může rozlišit posun vlnových délek 0,001 nm. Jaká je minimální velikost magnetické indukce, kterou lze zjistit u hvězdy na vlnové délce 450 nm.

Řešení: Využijeme vztah pro Zeemanův jev $\Delta\lambda = 47\lambda^2 B$, odkud $B \cong 0{,}1\,\text{T}$.

Úloha 5.27 Odhadněte očekávanou velikost magnetické indukce hvězdy stejného typu jako Slunce s dobou rotace $10^6\,\text{s}$, $R = 10^8\,\text{m}$, $T = 6\cdot 10^3\,\text{K}$, kterou lze na základě měření Zeemanova jevu zjistit v optické oblasti spektra prostřednictvím čáry Fe I o vlnové délce 630,25 nm.

Řešení: Pro spektroskopickou zjistitelnost musí platit $\Delta\lambda_\text{Z} > \Delta\lambda_\text{rot} + \Delta\lambda_\text{tep}$, tedy $47\lambda^2 B > \frac{\lambda v_r}{c} + \frac{2\lambda}{c}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$, dosazením obdržíme $B > 0{,}4\,\text{T}$.

Úloha 5.28 U hvězdy HD 215 441 o povrchové teplotě 15 000 K a rotační rovníkové rychlosti v radiálním směru $5\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ bylo zjištěno rozštěpení spektrální čáry Cr II o vlnové délce 455,8 nm v důsledku Zeemanova jevu $\Delta\lambda = 0{,}03\,\text{nm}$. Určete velikost magnetické indukce B. Je rozštěpení reálně zjistitelné při fotosférických podmínkách této hvězdy?

Řešení: Pro rozšíření vyvolané Zeemanovým jevem vyjádřeným v SI platí: $\Delta\lambda_\text{Z} = 47\lambda^2 B$, odtud $B = 3{,}4\,\text{T}$. Jev bude spektroskopicky zjistitelný, při $\Delta\lambda_\text{Z} > \Delta\lambda_\text{rot} + \Delta\lambda_\text{tep}$, tedy $\Delta\lambda_\text{Z} > \frac{\lambda v_r}{c} + \frac{2\lambda}{c}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$, po dosazení obdržíme: $0{,}03\,\text{nm} > 0{,}01\,\text{nm}$.

Úloha 5.29 Zeemanovské rozštěpení můžeme rovněž pozorovat u velkých slunečních skvrn, kde se vyskytují silná magnetická pole směřující radiálně k povrchu Slunce. Určete velikost magnetické indukce skvrny, jestliže rozštěpení zelené spektrální čáry železa o vlnové délce $\lambda = 525{,}0216\,\text{nm}$ činí $\Delta\lambda = 0{,}004\,\text{nm}$. Jaké rychlosti by odpovídal tento posuv, jestliže by byl vyvolán dopplerovským posuvem v důsledku radiálního pohybu.

Řešení: Ze vztahu $\Delta\lambda_Z = 47\lambda^2 B$ stanovíme $B = 0{,}3\,\mathrm{T}$. Různost vlnových délek rozštěpených čar odpovídá rychlosti $v_r = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Úloha 5.30 Rotační osa hvězdy je kolmá ke směru k Zemi, její rotační rovníková rychlost je $100\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Lze při této hodnotě rychlosti pozorovat zeemanovské rozštěpení čáry o vlnové délce $\lambda = 430\,\mathrm{nm}$, předpokládáme-li velikost magnetické indukce 0,1 T?

Řešení: $\Delta\lambda_{\mathrm{rot}} = \lambda\frac{v_{\mathrm{rot}}}{c} = 0{,}14\,\mathrm{nm}$, $\Delta\lambda_Z = 47\lambda^2 B = 8{,}7\cdot 10^{-4}\,\mathrm{nm}$. Nelze tedy spektroskopicky rozšíření čar zjistit.

6 Nitro hvězd

Úloha 6.1 Určete množství uvolněné energie při vzniku 1 jádra atomu helia ze čtyř jader atomů vodíku. Porovnejte s množstvím energie uvolňovaným při 3α procesu.

Řešení: pp řetězec: $\Delta m = 4\,^1_1\mathrm{H} - ^4_2\mathrm{He} = 4{,}76\cdot 10^{-29}\,\mathrm{kg}$, $\Delta E = \Delta mc^2 = 4{,}29\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$, tedy 26,8 MeV. Pro 3α proces: $\Delta m = 3\,^4_2\mathrm{He} - ^{12}_6\mathrm{C} = 1{,}29\cdot 10^{-29}\,\mathrm{kg}$, $\Delta E = \Delta mc^2 = 1{,}16\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$, tudíž 7,2 MeV.

Úloha 6.2 Najděte vazebnou energii jádra atomu lithia $^7_3\mathrm{Li}$, jestliže hmotnost atomu $M_{\mathrm{Li}} = 7{,}01601\,\mathrm{u}$, Hmotnost protonu je 1,00783 u, hmotnost neutronu je 1,00867 u.

Řešení: Obdobným postupem jako u první úlohy určíme $\Delta E = 39{,}3\,\mathrm{MeV}$.

Úloha 6.3 Určete minimální hmotnost hvězdy, aby centrální teplota umožňovala průběh termonuklárních reakcí. Předpokládáme rozložení hustoty $\rho = \rho_{\mathrm{c}}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$, chemické složení shodné se Sluncem, $\mu = 0{,}61$, hvězdná látka je nedegenerována. Pro pp řetězec je nezbytná minimální teplota $4\cdot 10^6\,\mathrm{K}$, pro CNO cyklus $15\cdot 10^6\,\mathrm{K}$, 3α reakce $10^8\,\mathrm{K}$.

Řešení: Užijeme vztahy $\rho_{\mathrm{c}} = \frac{15M}{8\pi R^3}$, $P_{\mathrm{c}} = \frac{15GM^2}{16\pi R^4}$ a dosadíme do stavové rovnice pro ideální plyn $P = \frac{A}{\mu}\rho T \Rightarrow T_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\frac{\mu G}{A}\frac{M}{R}$. Odtud obdržíme $M = \frac{2T_{\mathrm{c}}RA}{\mu G}$.

Úloha 6.4 Termonukleární reakce probíhající ve Slunci byly v šedesátých létech minulého století ověřovány R. Davisem při sledování toku neutrin ze Slunce pomocí chlór-argonové reakce

$$\nu + ^{37}_{17}\mathrm{Cl} \rightarrow e^- + ^{37}_{18}\mathrm{Ar} - 0{,}814\,\mathrm{MeV}\cdot$$

Při ní jádro izotopu chlóru zachytí neutrino a přemění se na jádro izotopu argónu, má-li energii větší než 0,814 MeV. Střední účinný průřez reakce je $\sigma = 2\cdot 10^{-46}\,\mathrm{m}^2$. Předpokládáme, že Slunce vyzařuje za sekundu $N = 3\cdot 10^{33}$ vysoce energetických neutrin s energií 6,7 MeV, vznikajících při reakci $^8_5\mathrm{B} \rightarrow ^8_4\mathrm{Be} + e^+ + \nu$. Určete nezbytné množství perchloretylénu $\mathrm{C_2Cl_4}$, aby v něm vzniklo za rok 100 atomů $^{37}_{18}\mathrm{Ar}$. V přírodní směsi izotopů chlóru je obsaženo podle hmotnosti $\eta = 25\%$ jader $^{37}_{17}\mathrm{Cl}$, střední poloměr dráhy Země kolem Slunce volte $r = 1{,}5\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$.

Řešení: Počet atomů $^{37}_{18}\mathrm{Ar}$ je $n = \phi\sigma t N_{\mathrm{Cl}}$, kde $t = 1\,\mathrm{rok} = 3{,}2\cdot 10^7\,\mathrm{s}$, N_{Cl} je počet atomů chlóru, $\phi = \frac{N}{4\pi r^2}$ je tok neutrin na Zemi. Odtud obdržíme $N_{\mathrm{Cl}} = \frac{4\pi r^2 n}{N\sigma t}$. Při experimentu je nezbytné použít $\mathrm{C_2Cl_4}$ o hmotnosti $M = \frac{\mu N_{\mathrm{Cl}}}{4\eta} = \mu N_{\mathrm{Cl}}$, $M \cong 560\,\mathrm{tun}$. V této úloze je μ molekulární hmotnost.

Úloha 6.5 Centrální teploty dvou hvězd jsou $T_1 = 2\cdot 10^8\,\mathrm{K}$ a $T_2 = 1{,}8\cdot 10^8\,\mathrm{K}$. Stanovte poměr množství uvolňované energie v nitrech obou hvězd.

Řešení: Z uvedených hodnot centrálních teplot vyplývá, že jde o hvězdy s velkými hmotnostmi, kde probíhá CNO cyklus, u něhož množství uvolňované energie $\sim T^{18}$. Hledaný poměr je $\left(\frac{20}{18}\right)^{18}$, k jehož výpočtu využijeme vztah $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$, tedy $\left(\frac{20}{18}\right)^{18} = \left(1 + \frac{2}{18}\right)^{18} \cong \mathrm{e}^2 \cong 7$.

Úloha 6.6 Porovnejte vlastnosti elektromagnetického záření ve středu Slunce a na jeho povrchu, předpokládáme-li $T_\mathrm{C} = 1{,}5 \cdot 10^7\,\mathrm{K}$ a $T_\mathrm{P} = 5{,}8 \cdot 10^3\,\mathrm{K}$.

Řešení: Vyjdeme z vlastností fotonového plynu. Počet fotonů v objemové jednotce je $n = 8\pi \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = 2{,}404 \frac{8\pi k^3}{h^3 c^3} T^3 = 2{,}03 \cdot 10^7 T^3$, hustotu energie fotonů vyjádříme $u = 8\pi \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 kT \int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = 7{,}57 \cdot 10^{-16} T^4$. Pro střední energii připadající na jeden foton lze odvodit $E_\mathrm{f} = 2{,}70kT = 3{,}73 \cdot 10^{-23} T$. Pro tlak záření platí $P_\mathrm{r} = \frac{4\sigma}{3c} T^4$, intenzitu záření vyjádříme $I = \sigma T^4$. Propočítané výsledky shrneme v tabulce:

Vlastnosti	Povrch Slunce $5{,}8 \cdot 10^3\,\mathrm{K}$	Střed Slunce $1{,}5 \cdot 10^7\,\mathrm{K}$
Střední energie fotonu [eV]	1,3	$3{,}5 \cdot 10^3$
Hustota fotonů $n\,[\mathrm{m}^{-3}]$	$4 \cdot 10^{18}$	$7 \cdot 10^{28}$
Hustota energie $u\,[J \cdot \mathrm{m}^{-3}]$	0,9	$4 \cdot 10^{13}$
Tlak záření P_r[Pa]	0,1	$5 \cdot 10^{12}$
Intenzita záření $I\,[\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-3}]$	$6{,}4 \cdot 10^7$	$29 \cdot 10^{20}$

Úloha 6.7 Odhadněte poměr počtu fotonů a neutrin vyzařovaných Sluncem za 1 sekundu. Při termonukleární syntéze prostřednictvím pp řetězce se uvolňuje energie 26,8 MeV, přičemž neutrina odnáší asi 2–5% této energie.

Řešení: Počet fotonů vyzářených Sluncem za 1 sekundu je dán vztahem $\frac{\sigma T^4}{2{,}7kT} 4\pi R_\odot^2 \cong 1{,}8 \cdot 10^{45}$. Počet neutrin se střední energií lze odhadnout takto. V první úloze jsme vypočetli energii $4{,}29 \cdot 10^{-12}$ J uvolňovanou při syntéze vodík → helium. Slunce za jednu sekundu vyzáří $3{,}8 \cdot 10^{26}$ J. Tedy za jednu sekundu vznikne přibližně 10^{38} heliových jader. Při vzniku jednoho heliového jádra vzniknou dvě neutrina, proto za každou sekundu vznikne $2 \cdot 10^{38}$ elektronových neutrin. Poměr počtu fotonů a neutrin je přibližně 10^7.

Úloha 6.8 Odhadněte hodnotu centrálního tlaku v nitru Slunce.

Řešení: V zjednodušeném přiblížení platí pro tlakovou sílu na jednotkovou plochu tedy tlak $P_\mathrm{c} = 4G\frac{\rho M}{R}$, po dosazením číselných hodnot hmotnosti a poloměru Slunce a průměrné hustoty $\rho = 1{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$ dostaneme pro tlak $P_\mathrm{c} \cong 10^{15}\,\mathrm{Pa}$. Podle standardních modelů Bahcalla je ve skutečnosti centrální tlak o řád vyšší.

Úloha 6.9 Předpokládejme v nitru Slunce jednoatomový plyn, pro adiabatickou rychlost zvuku platí vztah $v_z = \left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{1/2}$. Za jak dlouho zvukové vlny projdou poloměrem Slunce?

Řešení: Při $\gamma = \frac{5}{3}$ lze zjednodušeně předpokládat $v_z \cong \left(\frac{5}{3}\frac{P}{\rho}\right)^{1/2}$, kde $P = \frac{P_\mathrm{c}}{2}$. Po dosazení obdržíme $v_z \cong 8 \cdot 10^5\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Poloměrem Slunce projdou zvukové vlny za $t = \frac{R_\odot}{v_z} \cong 17\,\mathrm{min}$.

Úloha 6.10 Odhadněte centrální tlak a teplotu ve hvězdě hlavní posloupnosti s poloměrem $1{,}3\,R_\odot$ a hmotností $1{,}8\,M_\odot$. Pro zjednodušení předpokládáme stejnou stavbu a chemické složení jako má Slunce.

Řešení: $\frac{P_\mathrm{c}}{P_{\mathrm{c}\odot}} \cong \left(\frac{R_\odot}{R}\right)^4 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \cong 1{,}1$, $\frac{T_\mathrm{c}}{T_{\mathrm{c}\odot}} \cong \frac{R_\odot}{R}\frac{M}{M_\odot} \cong 1{,}4$.

Úloha 6.11 Podle standardního modelu nitra má hvězdná látka v centrální části Slunce hustotu $1{,}48 \cdot 10^5\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a teplotu $1{,}56 \cdot 10^7\,\mathrm{K}$, hmotnostní zastoupení vodíku $X = 0{,}73$ a helia $Y = 0{,}27$, příspěvek těžších prvků lze v prvním přiblížení zanedbat. Vypočtěte tlak, který zde působí za předpokladu, že vodík a helium jsou plně ionizovány a chovají se jako ideální plyn. Vypočtěte rovněž tlak záření a oba tlaky porovnejte. Střední relativní hmotnost připadající na jednu částici směsi označíme μ_r

Řešení: $P_\mathrm{g} = \frac{\mathscr{R}}{\mu_\mathrm{r}}\rho T = 3{,}2 \cdot 10^{16}\,\mathrm{Pa}$, $P_\mathrm{r} = \frac{4\sigma}{3c}T^4 = 1{,}5 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Pa}$. Podstatný je tlak plynu, tlak záření je zanedbatelný.

Úloha 6.12 Posuďte, zda může existovat degenerace v nitru Slunce ($T_\mathrm{c} = 1{,}5 \cdot 10^7\,\mathrm{K}$, $\rho_\mathrm{c} = 1{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$).

Řešení: Dosazením do podmínky degenerace $\rho > \left(\frac{T}{75000}\right)^{3/2} 10^3$ zjistíme, že není splňována. V současné fázi vývoje Slunce je v jeho nitru degenerace nepodstatná.

Úloha 6.13 Odvoďte vztah pro rovnováhu gravitační a tlakové síly v nitru hvězd při předpokládané polytropní závislosti tlaku na hustotě.

Řešení: Úvahy lze zjednodušit následujícím způsobem. Pro gravitační sílu platí $F_\mathrm{grav} \sim -\frac{1}{R^2}$. Tlaková síla je dána součinem tlaku $p \sim \rho^\gamma$ a povrchu $S \sim R^2$, tudíž $F_\mathrm{tlak} \sim \rho^\gamma R^2 \sim R^{-3\gamma} R^2 \sim \frac{1}{R^{3\gamma-2}}$. Obě síly za normálních podmínek klesají s rozměry hvězdy, při jejich rovnosti nastane rovnovážný stav. Obě síly klesají stejně při koeficientu $\gamma = \frac{4}{3}$.

Diskutujme dvě možnosti, nejprve nechť $\gamma > \frac{4}{3}$. V tomto případě je tlaková křivka strmější než gravitační. Jestliže hvězda náhodně zvětší své rozměry, převládne gravitační síla a hvězda se smrští. Zmenší-li hvězda své rozměry, převládne tlaková síla a hvězda zvětší svůj rozměr. Shrnuto změny objemu hvězdy nemají za následek její rozpad.

V případě $\gamma < \frac{4}{3}$ je situace odlišná. Jestliže hvězda náhodně zvětší své rozměry, převládne tlaková síla a dojde ke zvětšování objemu. Hvězda se stane nestabilní, například může odhodit vnější vrstvy. Zmenší-li své rozměry dojde ke gravitačnímu kolapsu.

Hvězdná látka bílých trpaslíků se vyznačuje polytropním indexem blízkým $\frac{4}{3}$, ten se však mění s hmotností bílého trpaslíka. Při kritické Chandrasekharově hmotnosti přibližně $1{,}44\,M_\odot$ má hodnotu právě $\gamma = \frac{4}{3}$ a bílý trpaslík se stává nestabilní.

Úloha 6.14 Určete centrální tlak ve hvězdě spektrální třídy B0 o poloměru $8\,R_\odot$, hmotnosti $15\,M_\odot$, centrální teplota je odhadována na $3{,}4 \cdot 10^7\,\mathrm{K}$, $\mu_\mathrm{r} = 0{,}7$.

Řešení: Po dosazení $P_\mathrm{g} = \frac{\mathscr{R}}{\mu_\mathrm{r}}\rho T = 1{,}6 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Pa}$, $P_\mathrm{r} = \frac{4\sigma}{3c}T^4 = 3{,}2 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Pa}$.

Úloha 6.15 Ve hvězdě o hmotnosti M hustota klesá od středu k povrchu jako funkce radiální vzdálenosti r podle vztahu $\rho = \rho_\mathrm{c}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$, kde ρ_c je daná konstanta a R je poloměr hvězdy. Nalezněte:

a) $m(r)$,
b) odvoďte závislost mezi M a R,
c) ukažte, že průměrná hustota hvězdy je $0{,}4\,\rho_\mathrm{c}$.

Řešení: a) Dosadíme do rovnice kontinuity
$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r)\mathrm{d}r = 4\pi\rho_\mathrm{c}\left[\int_0^r r^2\mathrm{d}r - \frac{1}{R^2}\int_0^r r^4\mathrm{d}r\right] = 4\pi\rho_\mathrm{c}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right)$.

b) $M = m(R) = \frac{8\pi\rho_c R^3}{15}$

c) $\rho = \frac{M}{V} = \frac{\frac{8\pi\rho_c R^3}{15}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 0{,}4\rho_c$.

Úloha 6.16 Pro hvězdu o hmotnosti M a poloměru R nalezněte centrální tlak a prověřte platnost nerovnice $p_c > \frac{GM^2}{8\pi R^4}$ pro případy

a) stejné, konstantní hustoty ve hvězdě

b) pro hustotu platí závislost $\rho = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$.

Řešení: a) Při konstatní hustotě platí $\rho = \overline{\rho}$, $m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) \mathrm{d}r = \frac{4\pi r^3}{3}\overline{\rho} = M\left(\frac{r}{R}\right)^3$. Dosadíme $m(r)$ do rovnice hydrostatické rovnováhy $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -G\rho\frac{m}{r^2}$ a integrujeme od středu $P = P_c$ k povrchu $P = 0$. Obdržíme $P_c = G\overline{\rho}\int_0^R \frac{m(r)}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}$; $\frac{3GM^2}{8\pi R^4} > \frac{GM^2}{8\pi R^4}$.
b) Užijeme výrazy $\rho(r)$, $m(r)$ a $M(R)$ z předchozích úloh, budeme integrovat rovnici hydrostatické rovnováhy
$P_c = G\int_0^R \rho\frac{m}{r^2}\mathrm{d}r = 4\pi G\rho_c^2 \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left[\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2}\right]\mathrm{d}r = \frac{15GM^2}{16\pi R^4}$; $\frac{15GM^2}{16\pi R^4} > \frac{GM^2}{8\pi R^4}$.

Úloha 6.17 Hvězda spektrální třídy B0 V má hmotnost $\sim 15\,M_\odot$. S využitím vztahu hmotnost – zářivý výkon $L \sim M^4$ odhadněte střední hustotu hvězdy.

Řešení: Pro hmotnost $15\,M_\odot$ obdržíme $L \cong 5 \cdot 10^4 L_\odot$. Efektivní teplotu B0 V lze odhadnout na přibližně 30 000 K. Poloměr hvězdy je $8\,R_\odot$, tudíž střední hustota $\rho \cong 40\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

Úloha 6.18 Jsou zadány dvě hvězdy se spektrálními třídami K0 V a K0 I.

a) určete poměr zrychlení na povrchu obou hvězd

b) stanovte poměr středních hustot těchto hvězd

Tabulkové hodnoty charakteristik hvězd jsou pro K0 V: 0,8 $M_\odot$; 0,85 $R_\odot$; 5 100 K a pro K0 I :13 $M_\odot$; 200 $R_\odot$; 4 100 K.

Řešení: Pro gravitační zrychlení platí $g = G\frac{M}{R^2}$, pro $g_V = 3 \cdot 10^3\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $g_I = 9 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, poměr zrychlení je roven $\frac{g_V}{g_I} \cong 3400$. Střední hustoty určíme ze vztahu $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, poměr hustot je roven $\frac{\rho_V}{\rho_I} = 8 \cdot 10^5$.

Úloha 6.19 Efektivní povrchová teplota Siria A je 9 400 K, poloměr 1,8 $R_\odot$ a hmotnost 2,2 $M_\odot$. Určete zářivý výkon v jednotkách zářivého výkonu Slunce, absolutní bolometrickou hvězdnou velikost, průměrnou hustotu a odhadněte centrální teplotu.

Řešení: 22,7 $L_\odot$, 1,35 mag, $530\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $1{,}7 \cdot 10^7$ K.

Úloha 6.20 Dokažte, že střední relativní hmotnost připadající na jednu částici směsi plně ionizovaných atomů v nitru hvězd je rovna $\mu_r = \frac{2}{1+3X+0{,}5Y}$, kde X, Y, Z označuje relativní množství vodíku, helia a ostatních prvků.

Řešení: $\mu_H = \frac{1}{2}$, $\mu_{He} = \frac{4}{3}$, $\mu_{kovy} = 2$, $\mu_r = \dfrac{1}{\frac{X}{\mu_H} + \frac{Y}{\mu_{He}} + \frac{Z}{\mu_{kovy}}} = \dfrac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z}$ Protože platí $X + Y + Z = 1$ dostaneme $\mu_r = \dfrac{2}{1 + 3X + 0{,}5Y}$.

Úloha 6.21 Jak se bude měnit střední relativní hmotnost μ_r částic sluneční látky, při předpokladu $X = 0{,}70$, $Y = 0{,}30$ budeme-li hypoteticky postupovat od středu k povrchu Slunce. Rozlišujte případy:
a) helium a vodík jsou plně ionizovány
b) helium a vodík jsou 1× ionizovány
c) helium je neutrální a vodík je zcela ionizován
d) oba plyny jsou neutrální.

Řešení: Postupným dosazováním podle jednotlivých případů do vztahu z předcházející úlohy obdržíme 0,615, 0,645, 0,678, 1,29.

Úloha 6.22 Odvoďte vztah hmotnost – zářivý výkon pro hvězdy na hlavní posloupnosti (HP) za předpokladu, že koeficient střední opacity κ je konst. v celém průřezu hvězdy, tedy opacita nezávisí na teplotě a je stejná u hvězd různých hmotností. Jde o Thomsonův rozptyl na volných elektronech.

Řešení: $T_\mathrm{c} = \dfrac{\mu_\mathrm{r} GM}{\mathscr{R} R}$, $P_\mathrm{c} = 4G\rho\dfrac{M}{R}$, $\sigma T_\mathrm{c}^4 = \sigma\left(\dfrac{\mu_\mathrm{r} GM}{\mathscr{R} R}\right)^4$, $\dfrac{L}{4\pi R^2} = \dfrac{\sigma T_\mathrm{c}^4}{3\kappa\rho R} = \dfrac{\sigma}{3\kappa\rho R}\left(\dfrac{\mu_\mathrm{r} GM}{\mathscr{R} R}\right)^4$
$\Rightarrow L = \dfrac{16\pi^2\sigma G^4}{9\mathscr{R}^4}\dfrac{\mu_\mathrm{r}^4}{\kappa}M^3$.

Úloha 6.23 Odvoďte vztah pro Eddingtonovu limitu maximálního zářivého výkonu hvězdy. Při odvození předpokládáme platnost rovnice hydrostatické rovnováhy, rovnost gravitační síly a síly tlaku záření, v chemickém složení uvažujeme pouze vodík.

Řešení: Gradient tlaku je dán vztahem $\frac{\mathrm{d}P_\mathrm{z}}{\mathrm{d}r} = -\frac{\kappa\rho}{c}\frac{L}{4\pi r^2}$, kde κ je střední hodnota opacity. Rovnice hydrostatické rovnováhy $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -G\frac{M\rho}{r^2}$ je uvažovaná na povrchu hvězdy, tedy pro $r = R$. Dosadíme a upravíme: $L_\mathrm{Ed} = \frac{4\pi Gc}{\kappa}M$, což je hodnota maximálního zářivého výkonu, při kterém je hvězda ještě ve stavu zářivé rovnováhy. Užívají se rovněž i tyto vztahy: $L_\mathrm{Ed} \cong 1{,}5\cdot 10^{31}\frac{M}{M_\odot} \cong 3{,}9\cdot 10^4 L_\odot\frac{M}{M_\odot}$.

Úloha 6.24 Stanovte Eddingtonovu limitu zářivého výkonu hvězdy s hmotností $0{,}085\,M_\odot$ za předpokladu, že pro opacitu v blízkosti povrchu hvězdy je dominantní elektronový rozptyl, jehož hodnota je dána vztahem $\kappa \cong (1+X)\;0{,}02\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-1}$. Při $X = 0{,}7$ dostáváme $\kappa \cong 0{,}034\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-1}$. Je tlak záření podstatný pro stabilitu hvězd nízké hmotnosti na hlavní posloupnosti?

Řešení: Dosadíme do vztahu pro Eddingtonův limitní zářivý výkon $L_\mathrm{Ed} = \frac{4\pi Gc}{\kappa}M = 1{,}3\cdot 10^{30}\,\mathrm{W}$. U hvězd nízké hmotnosti na hlavní posloupnosti, viz řešení úlohy č. 10, lze tlak záření zanedbávat.

Úloha 6.25 Užitím podmínky $L \leq L_\mathrm{Ed}$, kde L_Ed je dán rovnicí $L_\mathrm{Ed} = \frac{4\pi Gc}{k}M$ odvoďte horní limitu pro hmotnost a zářivý výkon hvězd hlavní posloupnosti za zjednodušujícího předpokladu vztahu hmotnost – zářivý výkon $\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3$.

Řešení: Podmínku $L < \frac{4\pi Gc}{k}M$ můžeme přepsat $\frac{L}{L_\odot} < \frac{4\pi Gc}{k}\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{M}{M_\odot}$. Odtud při využití vztahu hmotnost – zářivý výkon obdržíme $\frac{M}{M_\odot} < \left(\frac{4\pi Gc}{k}\frac{M_\odot}{L_\odot}\right)^{1/2}$. Dosazením $\frac{M}{M_\odot} = 180$.

Úloha 6.26 Prostřednictvím rovnice hydrostatické rovnováhy určete, za jak dlouho se zmenší poloměr Slunce o 2%, jestliže by 10% gravitačních sil nebylo vyrovnáváno tlakovými silami.

Řešení: Rovnice hydrostatické rovnováhy má v zadaném případě tvar $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -g\rho - 0{,}1g\rho$. Pro zjednušení budeme předpokládat konstantnost dodatečného povrchového gravitačního zrychlení na povrchu Slunce v průběhu smršťování $g = 27{,}41\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, očekávaná změna poloměru je přibližně 14000 km. Ze vztahu $s = \frac{g}{2}t^2$ stanovíme čas $t \cong 1000\,\mathrm{s}$, tedy asi 17 minut. Změna poloměru by byla pozorovatelná ze Země.

Úloha 6.27 Za předpokladu přenosu energie v nitru hvězdy zářením dokažte, že teplotní gradient je určen výrazem $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{3\kappa L_r}{64\pi\sigma r^2 T^3}\rho$.

Řešení: Předpokládáme ze zadání platnost zářivé rovnováhy ve hvězdě. Tok zářivé energie jednotkovou plochou sféry o poloměru r je dán vztahem $F = \frac{L_r}{4\pi r^2}$. Energie absorbovaná ve zvoleném objemovém elementu je $\frac{L_r}{4\pi r^2}\kappa\rho\mathrm{d}r$. Tlakový gradient je $\frac{\mathrm{d}P_r}{\mathrm{d}r} = -\frac{\kappa\rho}{c}\frac{L_r}{4\pi r^2}$, kde $\mathrm{d}P_r = \frac{16\sigma}{3c}T^3\mathrm{d}T$. Dosazením obdržíme rovnici pro teplotní gradient.

Úloha 6.28 Určete, zda v místě $r = 0{,}9\,R_\odot$ od středu Slunce probíhá přenos energie konvekcí nebo zářením. Parametry zvoleného místa jsou následující: $\rho = 1{,}5\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, $\kappa = 10\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-1}$, $T = 4\cdot 10^5\,\mathrm{K}$, $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{5}{3}$, $P = 8{,}7\cdot 10^9\,\mathrm{Pa}$.

Řešení: Konvekce je dominatní při splnění podmínky $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} > \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{T}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}$, což lze zapsat $\frac{3\rho\kappa}{16\sigma T^3}\frac{L(r)}{4\pi r^2} > \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{T}{P}\frac{GM(r)}{r^2}\rho$. Po dosazení obdržíme $0{,}06 > 0{,}009$, tedy podmínka nastolení konvekce je splňována.

Úloha 6.29 Dokažte, že v centrální oblasti Slunce nenastává přenos energie konvekcí. Velikost zářivého výkonu uvolňovaného na jednotku hmotnosti je odhadována na $1{,}35\cdot 10^{-3}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$, $\gamma = \frac{5}{3}$, $P = 3{,}20\cdot 10^{16}\,\mathrm{Pa}$, $T = 1{,}56\cdot 10^7\,\mathrm{K}$, $\kappa = 0{,}138\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.

Řešení: Minimální kritická hodnota zářivého výkonu na jednotku hmotnosti přenášená konvekcí je dána vztahem $\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{16\pi Gc}{\kappa}\frac{aT^4}{3}\frac{1}{P}$, kde $a = \frac{4\sigma}{c}$. Po číselném dosazení obdržíme $1{,}36\cdot 10^{-3}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$. Protože propočítaná hodnota je větší, přenos konvekcí nenastává.

Úloha 6.30 Předpokládejme střední hustotu Slunce $1{,}4\cdot 10^3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ a střední opacitu v nitru Slunce pro ionizovaný vodík $\kappa = 0{,}1\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-1}$. Určete střední volnou dráhu fotonu ve středu Slunce a střední teplotní gradient. Za zjednodušujícího předpokladu, že střední volná dráha fotonu směrem k povrchu je stále stejná, odhadněte charakteristický čas, za který foton dospěje z nitra k povrchu Slunce.

Řešení: Střední volná dráha fotonu je $l = \frac{1}{\kappa\rho} = 7\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$. Při centrální teplotě Slunce $T_\mathrm{c} = 1{,}4\cdot 10^7\,\mathrm{K}$ a přibližné povrchové teplotě $T_\mathrm{p} = 6\cdot 10^3\,\mathrm{K}$ je střední teplotní gradient roven $\frac{\Delta T}{\Delta r} = \frac{T_\mathrm{c}-T_\mathrm{p}}{R_\odot} \cong 2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Pro šíření fotonu nitrem Slunce k povrchu platí $R_\odot = \sqrt{z}\,l$, kde z udává počet absorpcí a emisí. Dosazením dostaneme $z = 10^{22}$. Každá emise respektive reemise proběhne průměrně za $10^{-8}\,\mathrm{s}$, tedy za $10^{22}10^{-8} = 10^{14}\,\mathrm{s} \cong 3\cdot 10^6$ roků dospěje foton k povrchu.

Úloha 6.31 Odvoďte vztah pro periodu radiálních pulsací cefeid s využitím rovnice hydrostatické rovnováhy. Oscilace pulsujících hvězd jsou důsledkem rezonance zvukových vln rezonujících ve hvězdném nitru.

Řešení: Adiabatická rychlost zvuku je dána vztahem $v_z = \left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{1/2}$, tlak vyjádříme z rovnice hydrostatické rovnováhy za předpokladu konstantní hustoty $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2 r$, pro tlak obdržíme $P(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho^2\left(R^2 - r^2\right)$. Pulsační perioda je dána vztahem $\Pi \cong 2\int_0^R \frac{\mathrm{d}r}{v_z} \cong$ $2\int_0^R \left[\frac{2}{3}\gamma\pi G\rho\left(R^2 - r^2\right)\right]^{-1/2}\mathrm{d}r \Rightarrow \Pi \sim \left(\frac{3\pi}{2\gamma G\rho}\right)^{1/2}$.

7 Hvězdné atmosféry

Úloha 7.1 Vyjádřete Boltzmannovu a Sahovu rovnici v logaritmickém tvaru vhodném pro výpočty.

Řešení: Nejčastěji uváděný tvar pro Boltzmannovu rovnici je $\log\frac{N_B}{N_A} = -\frac{5040}{T}\chi_{AB} + \log\frac{g_B}{g_A}$ respektive pro Sahovu rovnici $\log\frac{N_1}{N_0} = \frac{5}{2}\log T - \frac{5040}{T}\chi_i - \log P_e + \log\frac{2B_{r+1}(T)}{B_r(T)} - 1{,}48$, kde χ_{AB} je excitační potenciál v eV, χ_i je ionizační potenciál v eV, teplota v K a elektronový tlak v Pa.

Úloha 7.2 Jaká část atomů vodíku bude excitována na druhou energetickou hladinu ve fotosféře Slunce, předpokládáme-li její teplotu 5 780 K? Nechť A je základní první energetická hladina, B je druhá hladina, dále je zadáno $\chi_{AB} = 10{,}16\,\mathrm{eV}$, $g_B = 4$, $g_A = 1$.

Řešení: Dosadíme do Boltzmannovy rovnice $\log\frac{N_B}{N_A} = -\frac{5040}{5780}10{,}16 + 0{,}6 = -8{,}26$. Odtud dostaneme $N_B = 5{,}5 \cdot 10^{-9} N_A$, přibližně na jednu miliardu vodíkových atomů ve fotosféře připadá jeden, který má obsazenu druhou energetickou hladinu. Při pouze řádových výpočtech lze výraz $\log\frac{g_B}{g_A}$ zanedbat, zpravidla g_B a g_A jsou nevelká čísla stejného řádu.

Úloha 7.3 Vypočítejte podíl atomů vodíku excitovaných na druhou energetickou hladinu u hvězd s hodnotami teplot fotosfér (zaokrouhleno) 5 780 K – Slunce, 9 500 K – Vega a 15 000 K – Rigel. Jaký závěr odtud vyplývá pro intenzitu spektrálních čar atomu vodíku?

Řešení: Pro Slunce platí $N_B = 5{,}5 \cdot 10^{-9} N_A$, u Vegy $N_B = 1{,}6 \cdot 10^{-5} N_A$ a pro Rigel $N_B = 1{,}5 \cdot 10^{-3} N_A$. S rostoucí teplotou narůstá počet atomů na druhé energetické hladině, odkud při přechodech vznikají absorpční čáry vodíku. Jestliže záměrně modelově neuvažujeme vliv ionizace, s rostoucí teplotou se zvětšuje intenzita vodíkových čar.

Úloha 7.4 Nechť A je základní první energetická hladina iontu O III (ve skutečnosti se skládá ze tří velmi blízkých hladin $^3P_{0,1,2}$). Excitační potenciál $\chi_{AB} = 2{,}48\,\mathrm{eV}$, $g_A = 9$, $g_B = 5$. Určete počet atomů nacházejících se na druhé energetické hladině B (přesnější označení je $^1D_2$) při teplotě 10 000 K?

Řešení: Dosazením obdržíme $N_B = 3{,}2 \cdot 10^{-2} N_A$. Při přechodu $B \rightarrow A$ vznikají „zelené" nebulární čáry N_2 a N_1.

Úloha 7.5 Užitím Sahovy rovnice vypočítejte poměr počtu H^- iontů a neutrálních vodíkových atomů ve fotosféře Slunce. Za teplotu zvolte 5 780 K, tedy efektivní povrchovou teplotu, elektronový tlak předpokládejte $\log P_e = 0{,}2\,\mathrm{Pa}$, $\chi_i = 0{,}75\,\mathrm{eV}$. Pauliho vylučovací princip vyžaduje existenci jednoho stavu pro iont, tudíž oba elektrony musí mít opačné spiny. V atmosféře Slunce pouze jeden z 10^7 vodíkových atomů vytváří podle reakce $\mathrm{H} + \mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{H}^- + \gamma$ iont H^-.

Řešení: Dosazením do Sahovy rovnice při volbě korekčního členu $\log\frac{2B(\mathrm{HI})}{B(\mathrm{H}^-)} = \log 2\frac{2}{1} = 0{,}602$, $\log\frac{N(\mathrm{HI})}{N(\mathrm{H}^-)} = 7{,}88 \Rightarrow N(\mathrm{HI}) = 7{,}6 \cdot 10^7\, N(\mathrm{H}^-)$. Pouze jeden z 10^8 vodíkových atomů je ve formě H^-, tedy převážná část fotosféry je složena z neutrálních vodíkových atomů s hustotou asi $10^{17}\,\mathrm{cm}^{-3}$. Pouze ionty H^- však přispívají podstatně ke spojité absorpci. Volné

elektrony poskytují kovy s nízkým ionizačním potenciálem 4,34 eV draslík, 5,14 eV sodík a 6,11 eV vápník.

Úloha 7.6 Stanovte poměr počtu atomů N_1 ionizovaného a N_0 neutrálního sodíku ve fotosféře Slunce při teplotě $T = 5\,780$ K a elektronovém tlaku $\log P_e = 0{,}2$ Pa, ionizační potenciál Na II je $\chi_1 = 5{,}14$ eV, korekční člen $\log \frac{2B_1(T)}{B_0(T)} = -0{,}08$.

Řešení: Do Sahovy rovnice dosadíme $\log \frac{N_1}{N_0} = \frac{5}{2} \log 5780 - \frac{5040}{5780} 5{,}14 - 0{,}2 - 0{,}08 - 1{,}48$, obdržíme $\log \frac{N_1}{N_0} = 3{,}24$, tedy $\frac{N_1}{N_0} = 1{,}7 \cdot 10^3$. Stupeň ionizace je $\frac{N_1}{N_1+N_0} = 0{,}9994$, tedy 99,94% atomů sodíku ve fotosféře Slunce je v ionizovaném stavu.

Úloha 7.7 Určete relativní množství Fe II ve fotosféře Siria A, kde předpokládáme přibližně $T = 10\,000$ K, $\log P_e = 1{,}48$ Pa. První ionizační potenciál je $\chi_1 = 7{,}87$ eV, korekční člen $\log \frac{2B_1(T)}{B_0(T)} = 0{,}36$. Do jaké míry je železo dvakrát ionizováno, jestliže druhý ionizační potenciál je $\chi_2 = 16{,}18$ eV a $\log \frac{2B_2(T)}{B_1(T)} = -0{,}08$

Řešení: Dosazením obdržíme $\log \frac{N_1}{N_0} = 3{,}44 \Rightarrow N_1 = 2{,}7 \cdot 10^3 N_0$. Celkově $\frac{N_1}{N_1+N_0} = 0{,}9996$, tudíž 99,96% atomů je Fe II. Při výpočtu počtu atomů Fe III opět použijeme Sahovu rovnici $\log \frac{N_2}{N_1} = -1{,}18 \Rightarrow N_2 = 6{,}6 \cdot 10^{-2} N_1$. Celkově $\frac{N_2}{N_2+N_1} = 0{,}062$, takže přibližně 6% atomů železa je ve stavu Fe III.

Úloha 7.8 Teplota fotosféry bílého trpaslíka DF Procyonu B je rovna $T = 8\,400$ K při elektronovém tlaku $\log P_e = 1{,}36$ Pa. Jaká musí být teplota obra, aby prvky s ionizačními potenciály $\chi_i = 4$ eV a $\chi_i = 8$ eV se vyznačovaly stejným stupněm ionizace. Předpokládejme elektronový tlak ve fotosféře obra $\log P_e = 1{,}00$ Pa.

Řešení: Dosazením do Sahovy rovnice vypočteme stupeň ionizace u bílého trpaslíka $\log \frac{N_1}{N_0} = 5{,}05$ při ionizačním potenciálu $\chi_i = 4$ eV. Dále řešíme Sahovu rovnici pro obra se zadaným stupněm ionizace, hledaná teplota obra je $T = 7\,600$ K. Obdobně pro ionizační potenciál $\chi_i = 8$ eV dostaneme stupeň ionizace $\log \frac{N_1}{N_0} = 2{,}65$, hledaná teplota je $T = 7\,900$ K.

Úloha 7.9 V kterém typu hvězdy, u červeného obra nebo trpaslíka hlavní posloupnosti bude probíhat výrazněji ionizace; u trpaslíka předpokládáme teplotu fotosféry $T = 5\,200$ K a elektronový tlak $\log P_e = -0{,}50$ Pa u obra $T = 4\,500$ K a $\log P_e = -1{,}80$ Pa. Ionizační potenciály nechť jsou $\chi_i = 5{,}14$ eV pro Na a $\chi_i = 7{,}87$ eV pro Fe.

Řešení: Na základě propočtu stupně ionizace ze Sahovy rovnice pro Na dostaneme u obra $\log \frac{N_1}{N_0} = 3{,}69$, u trpaslíka $\log \frac{N_1}{N_0} = 3{,}32$, dospějeme k závěru, že při ionizačním potenciálu 5,14 eV je ionizace větší ve fotosféře obra. Obdobně obdržíme u obra $\log \frac{N_1}{N_0} = 1{,}14$, ve fotosféře trpaslíka $\log \frac{N_1}{N_0} = 1{,}18$, při ionizačním potenciálu 7,87 eV železa. Ve fotosféře trpaslíka je ionizace mírně vyšší.

Úloha 7.10 Výpočtem doložte závěry spektroskopických pozorování, že čáry neutrálního vápníku Ca I mají větší intenzitu u trpaslíků než obrů pozdních spektrálních tříd. Předpokládáme stejnou teplotu obou hvězd 3 150 K, ionizační potenciál vápníku je $\chi_i = 6{,}11$ eV. Hodnota elektronového tlaku u obra $\log P_e = -2{,}7$ Pa, v případě trpaslíka $\log P_e = -1{,}2$ Pa. Korekční člen pro vápník má při zadané teplotě hodnotu 0,59.

Řešení: Dosazením do Sahovy rovnice pro obra obdržíme $\log \frac{N_1}{N_0} = 0{,}78 \Rightarrow N_1 = 6{,}03\,N_0$, takže počet neutrálních atomů je $\frac{N_0}{N_0+N_1} = 0{,}143$, tudíž pouze 14% atomů je neutrálních. U trpaslíka $\log \frac{N_1}{N_0} = -0{,}72 \Rightarrow N_1 = 0{,}19\,N_0$, počet neutrálních atomů je $\frac{N_0}{N_0+N_1} = 0{,}840$, takže 84% atomů vápníku je u trpaslíka neutrálních.

Úloha 7.11 Ve viditelné části spektra Slunce jsou nejintenzivnějšími čáry H a K Ca II, nikoliv čáry balmerovské série vodíku. Objasněte, proč tomu tak je, závěry doložte výpočtem!

Řešení: Zavedeme označení celkového počtu atomů vodíku N_C, počet atomů v základním stavu N_A, v prvním excitovaném stavu N_B, N_0 počet neutrálních atomů a N_1 počet ionizovaných atomů. K určení počtu ionizovaných atomů použijeme Sahovu rovnici a k stanovení rozložení atomů mezi základní první energetickou hladinou a druhou excitovanou hladinou použijeme Boltzmannovu rovnici. Předpokládáme elektronový tlak v atmosféře Slunce 1,6 Pa. Pro vodík ze Sahovy rovnice obdržíme $N_1 = 7{,}5 \cdot 10^{-5} N_0$. Jeden vodíkový iont H II připadá na každých 13 000 neutrálních vodíkových atomů H I v atmosféře Slunce. Dosazením do Boltzmannovy rovnice dostaneme $N_B = 5{,}0 \cdot 10^{-9} N_A$. Pouze jeden z 200 miliónů vodíkových atomů se nachází na druhé energetické hladině a může vyvolat vznik absorpčních čar Balmerovy série. Celkově $\frac{N_B}{N_C} = \frac{N_B}{N_B+N_A}\frac{N_0}{N_C} = 5 \cdot 10^{-9}$. Vápník Ca I má ionizační potenciál pouze 6,1 eV, tedy poloviční vzhledem k ionizačnímu potenciálu vodíku 13,6 eV. To má podstatný vliv na počet ionizovaných atomů, neboť Sahova rovnice je velmi citlivá k hodnotě ionizačního potenciálu, protože $\frac{\chi_i}{kT}$ je v exponentu a $kT \cong 0{,}5\,\mathrm{eV} \ll \chi_i$. Ze Sahovy rovnice dostáváme $\frac{N_1}{N_0} = 9 \cdot 10^2$. Pouze jeden z 900 atomů vápníku je Ca I, prakticky téměř všechny atomy vápníku jsou ve stavu Ca II. Z Boltzmannovy rovnice pro obsazení excitovaných hladin obdržíme $N_A = 2{,}6 \cdot 10^2 N_B$. Většina atomů se nachází na základní energetické hladině. Shrnuto převážná většina atomů vápníku je ve stavu Ca II a je na základní energetické hladině, tudíž existují vhodné podmínky pro vznik čar K a H Ca II.

$$\frac{N_A}{N_C} \cong \frac{N_A}{N_A+N_B}\frac{N_1}{N_C} \cong \frac{1}{1+\frac{N_B}{N_A}}\frac{\frac{N_1}{N_0}}{1+\frac{N_1}{N_0}} \cong 0{,}995\cdot$$

V atmosféře na $5 \cdot 10^5$ vodíkových atomů připadá pouze 1 atom vápníku, ale pouze $5 \cdot 10^{-9}$ z vodíkových atomů je neionizováno a nachází se na druhé energetické hladině. Celkově $5 \cdot 10^5 \times 5 \cdot 10^{-9} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$. Shrnuto ve fotosféře Slunce existuje 400× více vápníkových iontů Ca II na základní energetické hladině umožňujícím vznik spektrálních čar K a H čar než neutrálních vodíkových atomů na druhé energetické hladině, odkud při přechodech mohou vznikat čáry Balmerovy série. Intenzita čar K a H Ca II je způsobena citlivější teplotní závislostí jeho stavů excitace a ionizace, nikoliv celkově větším množstvím vápníku ve fotosféře Slunce. Modelově zjednodušeně neuvažujeme faktor pravděpodobnosti přechodu.

Úloha 7.12 Odhadněte pomocí výpočtu možný počet pozorovaných oddělených spektrálních čar Balmerovy série vodíku. Zjednodušeně předpokládáme, že šířka čar závisí na elektronové hustotě podle Starkova lineárního rozšíření. Využijte Inglisova – Tellerova vztahu $\log N_\mathrm{e} = 23{,}2 - 7{,}5 \log n_{\mathrm{B\check{c}}}$.

Řešení: Dosazením do Inglisova – Tellerova vztahu určíme $n_{\mathrm{B\check{c}}}$.

hvězda	spektrální třída	$\log N_e$	$\log n_{Bč}$
α Cyg	A2 I	12,2	29
Sirius A	A2 V	13,8	18
τ Sco	B0 V	14,6	14
bílý trpaslík	DA	16,4	8

Úloha 7.13 Proč ve spektru sluneční chromosféry pozorujeme více čar Balmerovy série vodíku než ve spektrech bílých trpaslíků?

Řešení: V atmosférách bílých trpaslíků je mnohem vyšší hustota než v chromosféře Slunce, proto je střední vzdálenost atomů v chromosféře mnohem větší. Vzdálenosti elektronů od jader atomů nemohou být větší než střední vzdálenost mezi atomy. Proto čím je vyšší hustota, tím menší počet energetických hladin je a tudíž tím menší počet balmerovských čar může vzniknout.

Úloha 7.14 Vysvětlete, proč Balmerovy čáry vodíku jsou pozorovatelné přibližně
a) do 5. čáry u bílých trpaslíků - např. Sirius B
b) do 15. čáry u hvězd hlavní posloupnosti - např. Sirius A
c) do 25. čáry u veleobrů - např. Betelgeuze.
Spetrální čáry Balmerovy série jsou rozšířeny srážkami. Jejich vzdálenost se s rostoucím číslem čáry zmenšuje.

Řešení: Rozhodující pro pozorovatelnost spektrálních čar je hustota atmosfér.

Úloha 7.15 Pro fotosféru hvězdy bylo stanoveno z intenzity čar Balmerovy série, že logaritmus počtu atomů vodíku, nacházejících se na druhé energetické hladině je roven 15,80. Nalezněte počet iontů vodíku N_1, jestliže $T = 29\,600\,\mathrm{K}$ a $\log P_e = 1{,}8\,\mathrm{Pa}$. Dále je zadáno $\chi_i = 13{,}60\,\mathrm{eV}$, $\chi_2 = 10{,}15\,\mathrm{eV}$, $g_2 = 8$, $B_1 = 1$.

Řešení: Dosadíme do kombinované Boltzmannovy - Sahovy rovnice, která má tvar:

$$\frac{N_1}{N_{0,r}} P_e = \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3} (kT)^{5/2} \frac{2B_1(T)}{g_{0,r}} \mathrm{e}^{\frac{\chi_i - \chi_r}{kT}},$$

udávající poměr počtu N_1 jedenkrát ionizovaných atomů k počtu $N_{0,r}$ neutrálních atomů nacházejících se na r-té energetické hladině, χ_i je ionizační potenciál, χ_r je excitační potenciál. Kombinovaná Boltzmannova–Sahova rovnice má logaritmický tvar

$$\log \frac{N_1}{N_{0,r}} = -\frac{5040}{T} (\chi_i - \chi_r) + 2{,}5 \log T - 1{,}48 + \log \frac{2B_1(T)}{g_{0,r}} - \log P_e \cdot$$

Dosazením dostaneme $\log \frac{N_1}{N_{0,2}} = 6{,}72$ a při $\log N_{0,2} = 15{,}18$ obdržíme $\log N_1 = 22{,}52 \Rightarrow N_1 = {} = 3{,}3 \cdot 10^{28}\mathrm{m}^{-3}$. Tedy pouze velmi malá část atomů vodíku zůstane neutrální.

Úloha 7.16 Jaká by byla teplota Slunce, kdyby neexistovaly spektrální čáry?

Řešení: Platí: $\frac{\left(\frac{\sigma}{\pi}\right){T'_{\mathrm{ef}}}^4}{\left(\frac{\sigma}{\pi}\right){T_{\mathrm{ef}}}^4}$, kde f je zlomek celkového toku záření, které je blokováno, v případě Slunce $f = 0{,}14$. Úpravou vztahu dostaneme $T_{\mathrm{ef}} = (1-f)^{-1/4} T'_{\mathrm{ef}} \approx \left(1 + \frac{f}{4}\right) T'_{\mathrm{ef}}$. Po dosazení $T'_{\mathrm{ef}} = 5\,780\,\mathrm{K}$ dostaneme$T_{\mathrm{ef}} = 5\,997\,\mathrm{K}$, efektivní teplota by byla vyšší o 3,5 % tedy asi o 200 K.

Úloha 7.17 Hvězdný obr spektrální třídy K má efektivní teplotu 4 300 K. Zjištěná hodnota mikroturbulentní rychlosti je $v_{\mathrm{mt}} = 2\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Stanovte šířku čáry Fe I o vlnové délce $\lambda =$ $= 553{,}93\,\mathrm{nm}$.

Řešení: Pro rychlost tepelného pohybu platí $v_{\mathrm{nejpr}} = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} = 1{,}13\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Šířku čáry určíme ze vztahu $\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c}\left(v_{\mathrm{mt}}^2 + v_{\mathrm{nejpr}}^2\right)^{1/2} \cong 10^{-2}\,\mathrm{nm}$.

Úloha 7.18 Dokažte, že rovnici hydrostatické rovnováhy lze napsat ve tvaru používaném například u modelů hvězdných atmosfér $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\tau} = \frac{g}{\kappa}$.

Řešení: Vyjdeme ze vztahů $g = G\frac{M}{r^2}$ a $\mathrm{d}\tau = -\kappa\rho\mathrm{d}r$ a dosadíme do rovnice $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\rho g$.

Úloha 7.19 Předpokládejme, že provádíme pozorování skrz plazmu o konstantní hustotě a teplotě, příkladně $2{,}5\cdot10^{-4}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ a 5 780 K, což odpovídá dolním fotosférickým vrstvám Slunce. Nechť opacita plynu na vlnové délce λ_1 je $\kappa_{\lambda_1} = 0{,}026\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-1}$ a na vlnové délce λ_2 je $\kappa_{\lambda_2} = 0{,}03\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-1}$. Určete vzdálenost, ve které je optická hloubka rovna 2/3 pro každou vlnovou délku.

Řešení: Zjednodušeně dosadíme do vztahu pro optickou hloubku $\tau_\lambda = \int_0^s \kappa_{\lambda_1}\rho\mathrm{d}s$. Řešením dostaneme $s_1 = \frac{\tau_{\lambda_1}}{\kappa_{\lambda_1}\rho} = 103\,\mathrm{km}$, obdobně pro $s_2 = \frac{\tau_{\lambda_2}}{\kappa_{\lambda_2}\rho} = 89\,\mathrm{km}$.

Úloha 7.20 Dokažte, že ve fotosféře Slunce předpoklad lokální termodynamické rovnováhy (LTE) není naplňován. Nechť teplota ve zvolené vrstvě fotosféry se mění v intervalu 5 890 K – - 5 650 K v průběhu vzdálenosti 28 km.

Řešení: Teplotní škálová výška je rovna $H_T = \frac{T}{|\mathrm{d}T/\mathrm{d}r|} = 674\,\mathrm{km}$. Střední volná dráha fotonů je $l = \frac{1}{\kappa\rho}$. Při volbě $\kappa = 0{,}026\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-1}$ a $\rho = 2{,}5\cdot10^{-4}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ dostaneme $l = 150\,\mathrm{km}$, což je řádově srovnatelné s H_T. Vzhledem k velikosti střední volné dráhy fotony vycházejí bez interakce z fotosféry. Předpoklad LTE není splňován.

Úloha 7.21 Fotosféru Slunce lze pokládat v prvním přiblížení za šedou. Znamená to, že záření všech vlnových délek ve viditelné části spektra je zeslabováno stejně. Proč tedy okrajové ztemnění slunečního disku narůstá se zmenšováním vlnové délky?

Řešení: Z blízkosti okraje disku přichází záření z chladnějších vrstev o teplotě T_0, ve středu disku z vrstev o teplotě T_1, platí $T_1 > T_0$, tedy $B_\nu(T_1) > B_\nu(T_0)$. Proto je střed disku jasnější než okraj. V šedé atmosféře záření všech vlnových délek je zeslabováno stejně, avšak poměr $B_\nu(T_0)/B_\nu(T_1)$ udávající velikost okrajového ztemnění závisí na ν. Protože T_1 se příliš neodlišuje od T_0 užijeme vztahu $\frac{B_\nu(T_1)}{B_\nu(T_0)} \approx \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^\alpha$, kde $\alpha = \alpha(\nu) = \frac{h\nu}{kT_0}\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_0}\right)\right]^{-1}$. Odtud vyplývá, že velikost okrajového ztemnění je určována gradientem teploty v atmosféře. Čím rychleji roste teplota s hloubkou, tím větší je rozdíl T_1 a T_0 a důsledkem je větší okrajové ztemnění. Při konstantním gradientu teploty, t.j. při konstantním poměru T_1/T_0 je ztemnění odlišné na různých vlnových délkách v důsledku rozdílnosti hodnot členu $\frac{h\nu}{kT_0}$. Z analýzy výše uvedených vztahů vyplývá, že v dlouhovlnné oblasti spektra $\frac{h\nu}{kT_0} \ll 1$ je poměr Planckových funkcí roven T_1/T_0, v krátkovlnné oblasti spektra $\alpha \cong \frac{h\nu}{kT_0} \gg 1$ tedy okrajové ztemnění je podstatně větší a narůstá při přechodu ke kratším vlnovým délkám.

Úloha 7.22 Nalezněte výšku stejnorodé vodíkové fotosféry u
a) Slunce, $T_{\odot} = 6\,000\,\mathrm{K}$
b) bílého trpaslíka, $T = 30\,000\,\mathrm{K}$, $M = M_{\odot}$, $R = 10^{-2}\,R_{\odot}$.

Řešení: Výšku stejnorodé fotosféry určíme ze vztahu $H = \frac{kT}{g\mu_{\mathrm{r}} m_p}$. Fotosféra Slunce je složena především z neionizovaného vodíku. Při volbě $T = 6\,000\,\mathrm{K}$, $\mu_{\mathrm{r}} \cong 1$ dostaneme $H \cong 200\,\mathrm{km}$. U bílého trpaslíka předpokládáme fotosféru složenou z ionizovaného vodíku, $\mu_{\mathrm{r}} = 0{,}5$, pro její výšku obdržíme $H \cong 200\,\mathrm{m}$.

Úloha 7.23 Odhadněte počet částic v $1\,\mathrm{m}^3$ sluneční fotosféry předpokládáme-li teplotu $5\,780\,\mathrm{K}$ a tlak $10^4\,\mathrm{Pa}$ v optické hloubce $\tau = 0{,}5$. Porovnejte s koncentrací molekul v atmosféře u povrchu Země.

Řešení: V hlubších fotosférických vrstvách je při hustotě asi $10^{-4}\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ je počet částic přibližně $10^{22}\,\mathrm{m^{-3}}$. Při normálních podmínkách se v atmosféře Země nachází v $1\,\mathrm{m}^3$ asi 10^{25} částic. Tedy koncentrace v uvažované vrstvě fotosféry je zhruba 10^3 krát menší než v zemské atmosféře. Zatímco ve fotosféře Slunce jde především o atomy neionizovaného vodíku, v atmosféře Země jde o molekuly N_2 a O_2.

Úloha 7.24 Předpokládejme, že Slunce bude vyzařovat konstantním zářivým výkonem pouze na úkor energie uložené ve fotosféře o tloušťce $300\,\mathrm{km}$ a hustotě asi 10^{23} částic m^{-3}. Za jaký čas bychom pozorovali změny v slunečním záření, jestliže by energie fotosféry nebyla neustále doplňována z nitra Slunce. Zářivý výkon $1\,\mathrm{m}^2$ povrchu Slunce je $6 \cdot 10^7\,\mathrm{W}$.

Řešení: Počet částic v sloupci o výšce $300\,\mathrm{km}$ a průřezu $1\,\mathrm{m}^2$ je $3 \cdot 10^5 10^{23} = 3 \cdot 10^{28}$ částic. Při průměrné teplotě fotosféry $6\,000\,\mathrm{K}$ je energie jedné částice $\frac{3}{2}kT \cong 10^{-19}\,\mathrm{J}$. Celková energie ve vytčeném sloupci je $E \cong 10^{-19} 3 \cdot 10^{28} \cong 3 \cdot 10^9\,\mathrm{J}$. Tedy za čas $t \cong \frac{E}{F} \cong 50\,\mathrm{s}$ by došlo k vyčerpání zásob energie a nutně bychom pozorovali změny ve vyzařování a teplotě povrchu Slunce.

Úloha 7.25 Dokažte, že ve fotosféře Slunce je předpoklad o přenosu energie zářením oprávněný.

Řešení: Konvekce ve fotosféře nastane za podmínky $\left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{\mathrm{ad}} < \left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{\mathrm{z}}$. Po dosazení $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{g\mu p}{\mathscr{R}T}$ a úpravě obdržíme $\left(\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln \mathrm{d}}\right)_{\mathrm{ad}} < \left(\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln p}\right)_{\mathrm{z}}$. Za předpokladu adiabatických změn $p^{1-\gamma}T^{\gamma} = \mathrm{konst}\cdot$ při $\gamma = \frac{5}{3}$ dostaneme $\left(\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln p}\right)_{\mathrm{ad}} = \frac{2}{5}$. Z rovnice zářivé rovnováhy při $\kappa = \mathrm{konst}\cdot$ nalezneme $\left(\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln p}\right)_{\mathrm{z}} = \frac{1}{4}$. Tedy úvodní nerovnice není splněna a konvekce nenastává.

Úloha 7.26 Vypočtěte konvektivní tok ve fotosféře Slunce, předpokládáme $\Delta T \cong 300\,\mathrm{K}$, $\rho \cong 10^{-4}\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $v \cong 5 \cdot 10^2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, pro vodík $c_p \cong \frac{5}{2}\frac{R}{m} \cong 10^4\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$. Dále určete tok záření při $T \cong 5800\,\mathrm{K}$, $\kappa \cong 0{,}026\,\mathrm{m^2 \cdot kg^{-1}}$, $r \cong 3 \cdot 10^5\,\mathrm{m}$. Výsledky porovnejte a diskutujte.

Řešení: Konvektivní tok energie je roven $F_k \cong c_p \rho v \Delta T \cong 10^5\,\mathrm{J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}}$. Tok energie přenášené zářením je $F_{\mathrm{r}} \cong \frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \cong 2{,}3 \cdot 10^7\,\mathrm{J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}}$. Výrazně převládá přenos energie zářením. Konvektivní přenos může narůstat při změně κ či při nárůstu stupně ionizace s hloubkou.

Úloha 7.27 Dominantním detailem ve spojitých spektrech hvězd spektrální třídy A0 v optické části spektra je balmerovský skok při $\lambda = 364{,}6\,\mathrm{nm}$. Jak velké je okrajové ztemnění na discích těchto hvězd na vlnových délkách $\lambda_1 = 360{,}6\,\mathrm{nm}$ a $\lambda_2 = 368{,}6\,\mathrm{nm}$?

Řešení: Balmerovský skok při $\lambda = 364{,}6\,\mathrm{nm}$ ve spojitém spektru je způsoben tím, že v krátkovlnné části spektra od této vlnové délky je záření schopné ionizovat atomy vodíku počínaje z druhé energetické hladiny. V dlouhovlnné části spektra od tohoto skoku je možná ionizace pouze z třetí a vyšších energetických hladin. Fotosféra je v důsledku toho na vlnové délce $\lambda_2 = 368{,}6\,\mathrm{nm}$ více průzračná a lze ji pozorovat do větší hloubky, tedy vrstvy s vyšší teplotou, záření má vyšší intenzitu. Neprůzračnost fotosféry je velká v krátkovlnné části od skoku, např. na vlnové délce $\lambda_1 = 360{,}6\,\mathrm{nm}$, záření přichází téměř ze stejných vrstev položených v blízkosti povrchu. Proto je okrajové ztemnění malé. V dlouhovlnné části spektra od skoku přichází záření ve středu disku z relativně větších hloubek, z fotosférických vrstev o vyšší teplotě. Na okraji disku přichází záření z vrstev blízko povrchu. Shrnuto je okrajové ztemnění na delších vlnových délkách výraznější, což platí pouze v optickém oboru.

8 Dvojhvězdy

Úloha 8.1 Určete vzdálenost dvojhvězdy, známe-li její oběžnou dobu $T = 27$ roků, hmotnosti jednotlivých složek $3\,M_\odot$, $5\,M_\odot$ a velikost hlavní poloosy $a'' = 0{,}45''$.

Řešení: Podle III. Keplerova zákona platí $M_1 + M_2 = \left(\frac{a''}{\pi}\right)^3 T^{-2}$. Určíme π a stanovíme vzdálenost $r = \frac{1}{\pi} = 40\,\mathrm{pc}$.

Úloha 8.2 Můžeme pomocí Hubbleova dalekohledu rozlišit dvě hvězdy spektrální třídy O, mezi kterými je úhel 10^{-7} rad, na vlnové délce čáry L_α s $\lambda = 121{,}6\,\mathrm{nm}$.

Řešení: $\Theta = 1{,}22\lambda/D = 6{,}2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{rad} = 0{,}01''$. Ano, neboť úhlová vzdálenost mezi hvězdami převyšuje tuto hodnotu.

Úloha 8.3 Sirius je vizuální dvojhvězda s oběžnou dobou 49,94 roků a roční paralaxou $\pi = 0{,}379''$. Zjednodušeně předpokládejme, že dráhová rovina je kolmá k zornému paprsku. Velikost velké poloosy je $a'' = 7{,}62''$ Poměr vzdáleností složek A a B od středu hmotnosti je $\frac{r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{B}} = 0{,}466$. Nalezněte hmotnosti jednotlivých složek. Určete jejich zářivé výkony, jestliže Sirius A má $M_\mathrm{bol} = 1{,}36\,\mathrm{mag}$ a Sirius B $M_\mathrm{bol} = 8{,}9\,\mathrm{mag}$.

Řešení: Dosazením do III. Keplerova zákona stanovíme součet hmotností obou složek $(M_\mathrm{A} + M_\mathrm{B}) = \frac{a^3}{T^2}\frac{4\pi^2}{G} = 3{,}3\,M_\odot$, kde $a = \frac{a''}{\pi}$. Pomocí vztahu $\frac{r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{B}} = \frac{M_\mathrm{B}}{M_\mathrm{A}}$ nalezneme $M_\mathrm{A} = 2{,}2\,M_\odot$ a $M_\mathrm{B} = 1{,}1\,M_\odot$. Zářivé výkony nalezneme ze vztahu $\log L = 0{,}4\,(4{,}75 - M_\mathrm{bol})$, $L_\mathrm{A} = 22{,}7\,L_\odot$, $L_\mathrm{B} = 0{,}022\,L_\odot$.

Úloha 8.4 Uvažovaná modelová fyzická dvojhvězda se skládá ze dvou složek–obrů o přibližně stejné hmotnosti, obíhajících kolem společného hmotného středu s oběžnou dobou $T = 12$ dní. Velikost velké poloosy dvojhvězdy je $a = 2 \cdot 10^7\,\mathrm{km}$. Určete celkový počet vrypů difrakční mřížky N nezbytných pro pozorování ve viditelném oboru spektra vodíku tak, aby ve spektru II. řádu bylo možné pozorovat vzájemný oběh obou složek. Dále zjednodušeně předpokládáme, že teplota atmosfér obou hvězd je stejná a činí 6 000 K.

Řešení: Pro měřitelnost rozštěpení spektrálních čar $\Delta\lambda$ podmíněného dopplerovským posuvem je třeba, aby rychlost hvězd převyšovala střední kvadratickou rychlost pohybu atomů vodíku ve fotosférách hvězd. Dostaneme již známou podmínku $R = mN = \lambda/\Delta\lambda$, kde v případě pohybu dvojhvězd platí $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{c}{2v}$. Rychlost vypočteme ze vztahu $v = \frac{\pi a}{T}$. Po dosazení obdržíme podmínku $N > 1{,}25 \cdot 10^3$.

Úloha 8.5 Fyzická dvojhvězda 2MASSWJ0746425+2000321, se skládá z červeného a hnědého trpaslíka. Z pozorování byla zjištěna oběžná doba $T = 10$ roků, úhlová velikost velké poloosy $a'' = 0{,}20''$ a roční paralaxa $\pi'' = 0{,}08''$. Určete součet hmotností obou složek!

Řešení: Lineární velikost velké poloosy je $a = a''/\pi'' = 2{,}5\,\mathrm{AU}$, součet hmotností je roven $a^3/T^2 = M_1 + M_2$, tedy $a^3/T^2 = 0{,}16\,M_\odot$. Observačně zjištěné hodnoty hmotností jednotlivých složek jsou $M_1 = 0{,}085\,M_\odot$ a $M_2 = 0{,}066\,M_\odot$. První hvězda je červeným trpaslíkem z nejspodnější části hlavní posloupnosti zatímco druhá hvězdy je již hnědým trpaslíkem.

Úloha 8.6 Ze studia čárového spektra spektroskopické zákrytové dvojhvězdy byla zjištěna oběžná doba 8,6 roků. Maximální hodnota Dopplerova posuvu čáry H_α o vlnové délce $\lambda = 656{,}273\,\mathrm{nm}$ pro první složku je $\Delta_1 = 0{,}026\,\mathrm{nm}$, pro druhou složku $\Delta_2 = 0{,}052\,\mathrm{nm}$. Ze sinusového charakteru křivky radiálních rychlostí vyplývá, že dráhy jsou blízké kruhovým. Předpokládáme sklon dráhy 90°.Určete hmotnosti jednotlivých složek dvojhvězdy.

Řešení: Pro poměr hmotností obou složek platí $\frac{M_1}{M_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\Delta\lambda_2}{\Delta\lambda_1} = 2$. Z dopplerovského posuvu určíme radiální rychlosti $v_1 = \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda}c = 1{,}2 \cdot 10^4\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 12\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $v_2 = 24\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Poloměry drah jsou $a_1 = \frac{v_1 T}{2\pi} = 3{,}5\,\mathrm{AU}$, $a_2 = 6{,}9\,\mathrm{AU}$. Velká poloosa $a = a_1 + a_2 = 10{,}4\,\mathrm{AU}$. Pro celkovou hmotnost soustavy platí $M_1 + M_2 = \frac{a^3}{T^2} = 15{,}3\,M_\odot$. Jednotlivé hmotnosti složek jsou $M_1 = 10{,}2\,M_\odot$ a $M_2 = 5{,}1\,M_\odot$.

Úloha 8.7 Ve spektru zákrytové dvojhvězdy, jejíž jasnost se mění s periodou 3,953 dne, se spektrální čáry posouvají na opačné strany o hodnoty $(\Delta\lambda/\lambda)_1 = 1{,}9 \cdot 10^{-4}$ a $(\Delta\lambda/\lambda)_2 = 2{,}9 \cdot 10^{-4}$ od normální vlnové délky. Určete hmotnosti jednotlivých složek dvojhvězdy.

Řešení: Obdobně jako u předcházejících úloh určíme rychlosti obou složek $v_1 = c\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_1 = 57\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $v_2 = c\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_2 = 87\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Dále určíme velikosti jednotlivých poloos $a_1 = \frac{v_1 T}{2\pi} = 3{,}1 \cdot 10^9\mathrm{m}$, $a_2 = 4{,}7 \cdot 10^9\mathrm{m}$. Velká poloosa $a = a_1 + a_2 = 7{,}8 \cdot 10^9\mathrm{m}$. Při výpočtu celkové hmotnosti soustavy dosadíme do III. Keplerova zákona $M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{T^2} = 2{,}4 \cdot 10^{30}\mathrm{kg}$, hmotnost jednotlivých složek určíme ze vztahu $\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow M_1 = 1{,}4 \cdot 10^{30}\mathrm{kg} = 0{,}7\,M_\odot$, $M_2 = 1{,}0 \cdot 10^{30}\mathrm{kg} = 0{,}5\,M_\odot$

Úloha 8.8 U zákrytové proměnné dvojhvězdy s oběžnou dobou $T = 50$ dní byl pozorován zákryt $t_4 - t_1$ trvající 8 hodin. Minimum $t_3 - t_2$ pozorované v dráhové rovině trvalo 1 hodinu 18 minut. Radiální rychlost první složky je $v_1 = 30\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ a druhé složky $v_2 = 40\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Pro rovinu oběžné dráhy $i = 90°$. Určete poloměry obou hvězd a hmotnosti složek.

Řešení: Velikosti velkých poloos jsou $a_1 = \frac{v_1 T}{2\pi} = 2{,}1 \cdot 10^{10}\mathrm{m}$ a $a_2 = \frac{v_2 T}{2\pi} = 2{,}7 \cdot 10^{10}\mathrm{m}$. Velká poloosa $a = a_1 + a_2 = 4{,}8 \cdot 10^{10}\mathrm{m}$. Celkovou hmotnost soustavy určíme z III. Keplerova zákona $M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{T^2} = 3{,}5 \cdot 10^{30}\mathrm{kg}$. Dále dosadíme do vztahů pro zákrytové proměnné $\frac{t_4 - t_1}{T} = \frac{2(R_1 + R_2)}{2\pi a}$ a $\frac{t_3 - t_2}{T} = \frac{2(R_1 - R_2)}{2\pi a}$, kde R_1 a R_2 jsou poloměry složek. Poloměr první složky $R_1 = 5{,}9 \cdot 10^8\mathrm{m} = 0{,}85\,R_\odot$ a druhé složky $R_2 = 4{,}2 \cdot 10^8\mathrm{m} = 0{,}6 R_\odot$. Hmotnosti jednotlivých složek určíme ze vztahu $\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow M_1 = 2 \cdot 10^{30}\mathrm{kg} = 1 M_\odot$, $M_2 = 1{,}5 \cdot 10^{30}\mathrm{kg} = 0{,}75\,M_\odot$.

Úloha 8.9 Spektroskopická dvojhvězda má oběžnou dobu $T = 1{,}67$ dne. U první složky byla zjištěna poloviční amplituda rychlosti $K_\mathrm{A} = 131{,}0\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ a u druhé složky $K_\mathrm{B} = 201{,}8\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Excentricita dráhy je rovna nule, sklon dráhy nelze určit. Proto při výpočtu statisticky volíme $\sin^3 i = \frac{2}{3}$. Odhadněte hmotnosti jednotlivých složek.

Řešení: Součet hmotností obou složek vyjádřený v jednotkách hmotnosti Slunce určíme za vztahu $(M_\mathrm{A} + M_\mathrm{B})\sin^3 i = 1{,}036 \cdot 10^{-7}\,(1 - e^2)^{3/2}\,(K_\mathrm{A} + K_\mathrm{B})^3\,T$, obdržíme $10{,}6\,M_\odot$. Jednotlivé hmotnosti stanovíme pomocí vztahu $\frac{M_\mathrm{A}}{M_\mathrm{B}} = \frac{K_\mathrm{B}}{K_\mathrm{A}}$, $M_\mathrm{A} = 6{,}4\,M_\odot$ a $M_\mathrm{B} = 4{,}2\,M_\odot$.

Úloha 8.10 Přítomnost extrasolárních planet s hmotností řádově srovnatelnou s hmotností Jupitera zjišťujeme na základě změn radiálních rychlostí hvězd. Vypočtěte periodu a ampli-

tudy změn radiální rychlosti vyvolaných hypotetickou planetou o stejné hmotnosti jako Jupiter. Předpokládáme hvězdu o hmotnosti $1\,M_\odot$. Posuďte měřitelnost těchto změn současnými astronomickými prostředky.

Řešení: Budeme zjednodušeně předpokládat, že kolem hvězdy obíhá pouze jedna planeta s hmotností Jupitera. Střední oběžná rychlost pohybu extrasolární planety v_J by tudíž byla $13\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Protože $\frac{M_h}{M_J} = \frac{v_J}{v_h} \Rightarrow$ že očekávaná rychlost pohybu hvězdy bude $v_h \cong 13\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ v dráhové rovině exoplanety. Požadovaná přesnost optických metod určování radiálních rychlostí by měla být ještě 2× větší, v roce 1998 již byla dostatečná, dosahovala zhruba $7\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Úloha 8.11 Těsná dvojhvězda se skládá ze dvou složek, bílého trpaslíka s hmotností $1\,M_\odot$ a podobra o hmotnosti $0{,}5\,M_\odot$, který vyplňuje svůj rocheovský prostor. Předpokládáme kruhové dráhy obou složek, jejichž vzdálenost je $a = 10^9$m. Nalezněte oběžnou dobu, rychlosti obou složek a polohu l_1 prvního Lagrangeova bodu. Kvalitativně odhadněte změny velké poloosy a oběžné doby dvojhvězdy, jestliže předpokládáme přenos hmoty od podobra k bílému trpaslíku.

Řešení: Oběžnou dobu stanovíme z III. Keplerova zákona $T = \left(\dfrac{4\pi^2 a^3}{G\,(M_1+M_2)}\right)^{1/2} =$ $= 1{,}4\cdot 10^4$s $= 3{,}9$ hod. Rychlost první složky je $v_1 = M_2\left(\dfrac{G}{a\,(M_1+M_2)}\right)^{1/2} = 149\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, druhé $v_2 = M_1\left(\dfrac{G}{a\,(M_1+M_2)}\right)^{1/2} = 298\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Hodnota $l_1 = a\left(0{,}500 - 0{,}227\log\frac{M_2}{M_1}\right) =$ $= 4{,}3\cdot 10^8$m $= 8{,}87\cdot 10^{-3}$AU Při přenosu hmoty od složky s menší hmotností ke složce s větší hmotností narůstá oběžná doba T a zvětšuje se velká poloosa a dvojhvězdy.

Úloha 8.12 Při přenosu hmoty mezi složkami dvojhvězdy předpokládáme platnost zákonů zachování hmotnosti a dráhového momentu hybnosti, tedy $M_1 + M_2 = M_c$, $\frac{\mathrm{d}M_c}{\mathrm{d}t} = 0$; $L = \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2}\left[Ga\,(M_1+M_2)\right]^{1/2}$, $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0$. Nechť M_1 je hmotnost složky přijímající hmotu, zavedeme $\mu = \dfrac{M_1}{M_c}$. Dokažte, že pro relativní změnu poloosy a lze odvodit $\dfrac{\mathrm{d}a}{a} = 2\dfrac{2\mu-1}{\mu\,(1-\mu)}\dfrac{\mathrm{d}M_1}{M_c}$.

Řešení: Vyjdeme ze vztahu pro velikost momentu hybnosti $L = \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2}\left[Ga\,(M_1+M_2)\right]^{1/2}$, odkud vyjádříme $a = \frac{M_c L^2}{G M_1^2 (M_c - M_1)^2}$. Rovnici logaritmujeme a derivujeme (logaritmická derivace) a odvodíme $\frac{\mathrm{d}a}{a} = 2\frac{2\mu-1}{\mu(1-\mu)}\frac{\mathrm{d}M_1}{M_c}$.

Úloha 8.13 Dokažte, že pro relativní změnu oběžné doby dvojhvězdy s přenosem hmoty platí $\frac{\mathrm{d}T}{T} = 3\frac{2\mu-1}{\mu(1-\mu)}\frac{\mathrm{d}M_1}{M_c}$. Předpokládáme platnost stejných zákonů zachování jako v předcházející úloze.

Řešení. Vyjdeme z III. Keplerova zákona, ze kterého logaritmickou derivací dostaneme $3\frac{\mathrm{d}a}{a} = 2\frac{\mathrm{d}T}{T}$. Dosazením $\frac{\mathrm{d}a}{a} = 2\frac{2\mu-1}{\mu(1-\mu)}\frac{\mathrm{d}M_1}{M_c}$ obdržíme $\frac{\mathrm{d}T}{T} = 3\frac{2\mu-1}{\mu(1-\mu)}\frac{\mathrm{d}M_1}{M_c}$.

Úloha 8.14 Dokažte, že u těsných dvojhvězd je časová změna oběžné doby způsobená přenosem hmoty dána vztahem $\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 3\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t}\frac{M_1-M_2}{M_1 M_2}$.

Řešení: Předpokládáme platnost zákona zachování hmotnosti a dráhového momentu hybnosti při přenosu hmoty, tedy $M_1 + M_2 = M_c$, $\frac{\mathrm{d}M_c}{\mathrm{d}t} = 0$; $L = \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2}\left[Ga\,(M_1+M_2)\right]^{1/2}$,

$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0$. Z posledně uvedeného dostaneme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{M_1 M_2}{M_1+M_2}\right)\sqrt{a} + \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2}\frac{1}{2\sqrt{a}}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = 0$, odkud při platnosti vztahu $\frac{1}{2a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ obdržíme $\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 3\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t}\frac{M_1-M_2}{M_1 M_2}$.

Úloha 8.15 U dvojhvězdné soustavy U Cephei s oběžnou dobu $T = 2{,}49$ dne byl zjištěn její nárůst $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 2{,}3 \cdot 10^{-9}$. Za předpokladu, že tato změna je vyvolána přenosem hmoty, určete rychlost tohoto přenosu. Hmotnosti složek jsou $M_1 = 4{,}2\,M_\odot$ a $M_2 = 2{,}8\,M_\odot$. Která z hvězd přijímá hmotu?

Řešení: Při nárůstu oběžné doby je hmota přenášena od druhé složky M_2 k první M_1. Ze vztahu $\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 3\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t}\frac{M_1-M_2}{M_1 M_2}$ určíme $\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t} = 6 \cdot 10^{16}\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cong 10^{-6} M_\odot \cdot \mathrm{rok}^{-1}$.

Úloha 8.16 U dvojhvězdné soustavy s hmotnostmi jednotlivých složek $M_1 = 4{,}9\,M_\odot$ a $M_2 = 4{,}1\,M_\odot$ byla zjištěna rychlost přenosu hmoty $\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t} = 10^{-5}\,M_\odot \cdot \mathrm{rok}^{-1}$. Je-li oběžná doba $T = 1{,}94$ dne, určete její nárůst.

Řešení: Dosadíme do vztahu $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 3T\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t}\frac{M_1-M_2}{M_1 M_2} = 6{,}3 \cdot 10^{-9}$.

Úloha 8.17 Jakou část hmoty může ztratit jedna složka dvojhvězdného systému, aby fyzikální dvojhvězdný systém vázaný gravitací ještě zůstal zachován? Vyjděte ze zjednodušujícího předpokladu, že dráhy složek jsou kruhové, ztráta hmoty probíhá sféricko-symetricky a prakticky okamžitě, t.j. za čas mnohem menší, než je velikost oběžné doby dvojhvězdy. V případě, že se soustava nerozpadne po ztrátě hmoty, zůstane dráha kruhovou? Získá střed hmotnosti dvojhvězdy doplňkovou rychlost?

Řešení: Celková mechanická energie fyzikálního dvojhvězdného systému o hmotnostech jednotlivých složek M_1, M_2 je E_c, vzdálenost složek je a. Jde o gravitačně vázanou soustavu, platí $E_c = \frac{1}{2}M_1 v_1^2 + \frac{1}{2}M_2 v_2^2 - G\frac{M_1 M_2}{a} = -G\frac{M_1 M_2}{2a} < 0$. Pro rychlosti platí: $M_1 v_1 = M_2 v_2$. Předpokládejme, že u první hvězdy proběhla sférickosymetrická exploze, při níž nedošlo ke změně rychlosti v_1 a nechť pozůstatek první složky po výbuchu má hmotnost M_z. Platí $M_1 - \Delta M = M_z$. Celková mechanická energie systému po explozi je $E_{ce} = \frac{1}{2}M_z v_1^2 + \frac{1}{2}M_2 v_2^2 - G\frac{M_z M_2}{a}$. Pro gravitačně vázanou soustavu platí $E_{ce} < 0$. Dále platí $v_1 = \frac{M_2}{M_z+M_2}\left(\frac{G(M_1+M_2)}{a}\right)^{1/2}$ a $v_2 = -\frac{M_z}{M_z+M_2}\left(\frac{G(M_1+M_2)}{a}\right)^{1/2}$. Dosazením obdržíme pro $E_{ce} = \frac{G M_z M_2}{2a(M_z+M_2)}\left[M_1 + M_2 - 2\left(M_z + M_2\right)\right]$. Podmínka pro zachování dvojhvězdného systému je $M_1 - M_2 < 2M_z$.

Úloha 8.18 Zkoumejme fyzický dvojhvězdný systém HZ Her + Her X 1 s celkovou hmotností soustavy přibližně $4\,M_\odot$. Hmotnost první složky HZ Her je odhadována na $2{,}5\,M_\odot$. Předpokládáme, že při dalším vývoji se z této hvězdy po explozi obálky o hmotnosti asi $1\,M_\odot$ stane neutronová hvězda s hmotností $1{,}5\,M_\odot$. Druhou složkou soustavy je neutronová hvězda Her X 1 o hmotnosti $1{,}5\,M_\odot$. Zůstane dvojhvězdný systém zachován?

Řešení: Dosadíme do závěrečné nerovnice předchozí úlohy, $M_1 = 2{,}5\,M_\odot$, $M_2 = 1{,}5\,M_\odot$, $M_z = 1{,}5\,M_\odot$. Tudíž je splněna podmínka $M_1 - M_2 < 2M_z$.

Úloha 8.19 Hvězda o hmotnosti $20\,M_\odot$ exploduje jako supernova Ic typu, jejím pozůstatkem je neutronová hvězda o hmotnosti $1{,}4\,M_\odot$. Zůstane dvojhvězdný systém zachován, jestliže hmotnost druhé hvězdy je $6\,M_\odot$?

Řešení: Dosadíme $M_1 = 20\,M_\odot$, $M_2 = 6\,M_\odot$, $M_z = 1{,}4\,M_\odot$, podmínka $M_1 - M_2 < 2M_z$ není splněna, dvojhvězdný systém se rozpadne.

Úloha 8.20 Nechť hmotnosti složek dvojhvězdy jsou M_1 a M_2. Vyjádřete zákon zachování energie pro zkušební částici pohybující se v gravitačním poli dvojhvězdy v dráhové rovině hvězd. Souřadnou soustavu zvolíme s počátkem v hmotném středu dvojhvězdy kolem kterého rotuje úhlovou rychlostí ω, jde o tzv. korotující soustavu.

Řešení: Pro pohyb v dráhové rovině má integrál energie tvar

$$-\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} - \frac{\omega^2\,(x^2+y^2)}{2} + \frac{v^2}{2} = \text{konst}\cdot$$

Úloha 8.21 Dotyková dvojhvězda se skládá z červeného obra a neutronové hvězdy s hmotností $1\,M_\odot$ a poloměrem 10 km. Určete množství hmoty za rok přetékající od červeného obra na neutronovou hvězdu, které při tomto přenosu způsobuje vyzařování v rtg. oboru 10^{31}W. Předpokládejte, že změna gravitační potenciální energie částic plynu je přibližně rovna zářivému výkonu, především v rtg. oboru záření. Dále předpokládáme, že vzdálenost obou hvězd je mnohem větší než poloměr neutronové hvězdy.

Řešení: $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t} \cong G\frac{M}{R}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$, $L \cong G\frac{M}{R}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \cong \frac{LR}{GM} \cong 1{,}5\cdot 10^{15}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1} \cong 2\cdot 10^{-8}M_\odot\cdot\mathrm{rok}^{-1}$.

Úloha 8.22 Neutronovou hvězdu – pulsar s hmotností $2\,M_\odot$ a poloměrem 20 km a periodě 0,15 s obklopuje akreční disk vznikající přetokem hmoty z druhé hvězdy s tempem akrece přibližně $10^{-8}M_\odot\cdot\mathrm{rok}^{-1}$. Odhadněte $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ pro tento pulsar.

Řešení: Zářivý výkon, především v rtg. oblasti záření, je přibližně roven rychlosti ztráty gravitační potenciální energie plynu při akreci, $L \cong G\frac{M}{R}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$ a $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t} \cong G\frac{M}{R}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$. Dosazením získáme zářivý výkon $L \cong 8\cdot 10^{30}$W. Pro zářivý výkon pulsaru platí $L = \frac{8}{5}\pi^2 MR^2P^{-3}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$, odtud určíme $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \cong 10^{-12}$.

Úloha 8.23 Rtg. pulsar s periodou $P = 100$ s je jednou ze složek fyzické dvojhvězdy. Dopplerův posuv vyvolaný vyvolaný dráhovým pohybem pulsaru vede k periodické změně času příchodu pulsů, což dovoluje proměřit křivku radiálních rychlostí pulsaru. Jak se změní pozorovaná perioda pulsaru, jestliže druhou složkou je hvězda o hmotnosti $20\,M_\odot$, oběžná doba soustavy je 20 dnů. Hmotnost pulsaru přijměte $1{,}5\,M_\odot$, excentricita dráhy je nulová, sklon dráhy dosahuje 90°.

Řešení: Z III. Keplerova zákona $\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}\,(M_1+M_2)$ určíme velikost velké poloosy $a = 5{,}9\cdot 10^{10}\mathrm{m} = 0{,}4\,\mathrm{AU}$. Oběžná dráha pulsaru je kruhová, $v = \frac{2\pi a}{T} = 2{,}1\cdot 10^4\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 21\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Dopplerovský posuv způsobený radiálním pohybem je $v = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$, $\Delta\lambda = c\Delta T$. Úplná amplituda změny periody je $2\Delta T = 0{,}15$ s.

Úloha 8.24 Dvojhvězda s oběžnou dobou 10 dnů má složky o hmotnostech $10\,M_\odot$ a $2\,M_\odot$. Složka s menší hmotností je rtg. pulsarem s periodou 0,1 s. Nalezněte, v jakém intervalu se mění pozorovaná perioda pulsací. Předpokládáme kruhovou dráhu se sklonem 90°, pozorovací paprsek leží v dráhové rovině.

Řešení: Z III. Keplerova zákona stanovíme velikost velké poloosy $a = (M_1 + M_2)^{1/3}\, T^{2/3} \cong 0{,}2\,\mathrm{AU}$. Vzdálenost pulsaru od hmotného středu je $r = \frac{M_1}{M_1+M_2} a \cong 0{,}17\,\mathrm{AU}$. Rychlost oběžného pohybu pulsaru je $v = \frac{2\pi r}{T} \cong 190\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. V důsledku Dopplerova jevu se mění perioda pulsací, její relativní změna je $\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta v}{v} = \frac{v}{c} \cong 6\cdot 10^{-4}$. Jev pozorujeme jako zpožďování příchodu pulsů. Na dráze $2r = 0{,}34\,\mathrm{AU}$ je maximální hodnota zpožďování $0{,}34 \times 500 = 170\,\mathrm{s}$.

Úloha 8.25 Binární pulsar PSR 1913 + 16 v souhvězdí Orla, objevený na rádiovém teleskop u v Arecibu roku 1974 R. Hulsem a J.Taylorem, představuje systém dvou neutrono vých hvězd o hmotnostech $1{,}44\,M_\odot$ a $1{,}39\,M_\odot$. Velká poloosa soustavy $a = 8{,}6\cdot 10^8\,\mathrm{m}$, excentricita dráhy je $\epsilon = 0{,}617$ a oběžná doba je $T = 27\,907\,\mathrm{s}$. Podle výkladu objevitelů – nositelů Nobelovy ceny za fyziku z roku 1993, v souladu s OTR tento systém ztrácí svoji energii vyzařováním gravitačních vln, úbytek gravitační energie je vyjádřen vzorcem $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -$ -$\frac{35G}{5c^2}\frac{M_1^2 M_2^2}{(M_1+M_2)^2} a^4 \omega^6 f(\epsilon)$, kde $f(\epsilon) = \left(1 + \frac{72}{24}\epsilon^2 + \frac{37}{96}\epsilon^4\right)\left(1-\epsilon^2\right)^{-7/2}$. Stanovte gravitační zářivý výkon tohoto podvojného pulsaru a určete rovněž změnu oběžné doby pulsaru podle vzorce $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{96}{5}\frac{G^3}{c^5} M_1 M_2 (M_1+M_2)\left[\frac{4\pi^2}{G(M_1+M_2)}\right]^{4/3}\frac{f(\epsilon)}{T^{5/3}}$.

Řešení: Dosazením do uvedených vztahů dostaneme pro gravitační zářivý výkon soustavy $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \cong 3\cdot 10^{23}\,\mathrm{W}$, což je numericky hodnota nesrovnatelně menší než gravitační vazebná energie soustavy $E_\mathrm{c} = -\frac{GM_1M_2}{2a} = -3\cdot 10^{41}\,\mathrm{J}$. Pro změnu oběžné doby obdržíme $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -2{,}4\cdot 10^{-12}$, tedy hodnotu odpovídající téměř přesně naměřené.

9 Proměnné hvězdy

Úloha 9.1 Předpokládejme modelovou miridu o průměrné absolutní bolometrické hvězdné velikosti $M_{\rm bol} = -5\,$mag s efektivní povrchovou teplotou $T_{\rm ef} = 2300\,$K. Efektivní povrchová teplota Slunce je 5 780 K. Určete poloměr miridy.

Řešení: Nejprve určíme zářivý výkon $\log\frac{L}{L_\odot} = \frac{4{,}75+5}{2{,}5} = 3{,}9$, dále platí $\frac{R}{R_\odot} = \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{T_{\rm ef}}{T_{\rm ef\odot}}\right)^{-2} \cong 560$.

Úloha 9.2 Dlouhoperiodicky proměnná hvězda – mirida o Ceti se v maximu jasnosti vyznačuje hvězdnou velikostí 2,5 mag, zatímco v minimu jasnosti je její hvězdná velikost 9,2 mag. Kolikrát je jasnější v maximu než v minimu?

Řešení: Dosadíme do Pogsonovy rovnice $\frac{\phi_1}{\phi_2} = 2{,}512^{(m_2-m_1)} \cong 480$.

Úloha 9.3 V jakém rozmezí se mění lineární poloměr proměnné hvězdy Betelgeuse, je-li její roční paralaxa $\pi = 0{,}0076$“ a dosahuje-li v maximu jasnosti úhlový poloměr hvězdy hodnoty 0,034“, v minimu jasnosti 0,047“.

Řešení: Pro úhlový poloměr platí vztah $\alpha = \frac{R}{r}$, odtud $R = \alpha r$. Dosazením pro poloměr v maximu jasnosti obdržíme $R_{\rm max} = 4\cdot 10^{11}\,{\rm m} = 570\,R_\odot$ a v minimu jasnosti $R_{\rm min} = 8\cdot 10^{11}\,{\rm m} = 1140\,R_\odot$.

Úloha 9.4 Odvoďte prostřednictvím rozměrové analýzy vztah pro základní periodu radiálních pulsací proměnných hvězd.

Řešení: Lze předpokládat závislost periody $P \sim G, \rho, R$. Platí $P \sim G^x \rho^y R^z$, rozměr jednotlivých parametrů je $[P] = {\rm s}$, $[G] = {\rm m}^3\cdot{\rm kg}^{-1}\cdot{\rm s}^{-2}$, $[\rho] = {\rm kg}\cdot{\rm m}^{-3}$, $[R] = {\rm m}$. Porovnáním rozměrů levé a pravé části vztahu obdržíme ${\rm s} = {\rm m}^{3x}\cdot{\rm kg}^{-x}\cdot{\rm s}^{-2x}\cdot{\rm kg}^{y}\cdot{\rm m}^{-3y}\cdot{\rm m}^{z}$. K platnosti rozměrové rovnice musí být splněny algebraické rovnice

$$\begin{aligned} [\mathrm{s}] \quad & 1 = -2x, \\ [\mathrm{m}] \quad & 0 = 3x - 3y + z, \\ [\mathrm{kg}] \quad & 0 = -x + y. \end{aligned}$$

Jejich řešením dostaneme $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 0$. Po úpravě a dosazení získáme závislost pro základní periodu radiálních pulsací hvězd $P \sim (G\rho)^{-\frac{1}{2}}$. Perioda nezávisí na poloměru R hvězdy.

Úloha 9.5 Pulsující proměnná hvězda mění svoje charakteristiky, přičemž poměr střední kvadratické rychlosti pohybu atomů v atmosféře hvězdy a druhé kosmické rychlosti na povrchu hvězdy zůstává konstantní. Nalezněte poměr lineárních poloměrů proměnné hvězdy v maximu a minimu jasnosti, je-li amplituda změn jasnosti 1 mag.

Řešení: Předpokládejme, že v atmosféře hvězdy převládá látka složená z neutrálních atomů. Pro střední kvadratickou rychlost atomů platí $v_{\rm kvad} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}}$, kde T je teplota a μ

hmotnost atomů, teplotou rozumíme efektivní povrchovou teplotu hvězdy. Druhá kosmická rychlost $v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, kde M je hmotnost hvězdy a R její poloměr. Poměr uvedených rychlostí je $\frac{v_{\mathrm{kvad}}}{v_2} = \sqrt{\frac{3kTR}{2GM\mu}} = \sqrt{\frac{3k}{2GM\mu}TR} = \mathrm{konst.}$ Hmotnost hvězdy i neutrálních atomů se nemění, proto platí $T \cdot R = \mathrm{konst.}$, součin teploty a poloměru hvězdy je stálý. Nechť T_1 a R_1 jsou teplota a poloměr proměnné hvězdy v maximu jasnosti, T_2 a R_2 analogicky teplota a poloměr v minimu jasnosti. V obou případech teplota odpovídá efektivní povrchové teplotě. Po dosazení do Pogsonovy rovnice obdržíme $m_2 - m_1 = -2{,}5 \log \frac{R_2^2 T_2^4}{R_1^2 T_1^4} = -2{,}5 \log \frac{R_1^2}{R_2^2} = 1$, odtud je poměr poloměrů $\frac{R_1}{R_2} = 10^{-0{,}2} = 0{,}63$. V úlohách v této kapitole lze nahradit rozdíl absolutních bolometrických hvězdných velikostí rozdílem z pozorování přímo zjištěných pozorovaných hvězdných velikostí.

Úloha 9.6 Nechť pro základní periodu radiálních pulsací platí vztah $P \cong (G\rho)^{-\frac{1}{2}}$. Předpokládejme bílého trpaslíka o hmotnosti $0{,}6\,M_\odot$ a poloměru $1{,}3 \cdot 10^{-2}\,R_\odot$, hvězdu typu δ Cephei o hmotnosti $7\,M_\odot$ a poloměru $80\,R_\odot$, miridu o hmotnosti $1{,}1\,M_\odot$ a poloměru $370\,R_\odot$. Stanovte průměrné hustoty hvězd a jejich základní periody.

Řešení: Z uvedených charakteristik spočítáme průměrnou hustotu a dosadíme do uvedeného vztahu $P \cong (G\rho)^{-\frac{1}{2}}$. Obdržíme u bílého trpaslíka $\rho = 4 \cdot 10^8\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $P = 6{,}2\,\mathrm{s}$, u hvězdy typu δ Cephei $\rho = 1{,}9 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $P = 10{,}3$ dne a u miridy $\rho = 3{,}1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $P = 254{,}6$ dne.

Úloha 9.7 Předpokládáme-li při pulsacích cefeid malé relativní změny poloměru a efektivní teploty, platí pro změnu pozorované bolometrické hvězdné velikosti $\Delta m_{\mathrm{b}} = -2{,}17\frac{\Delta R}{R} - 4{,}34\frac{\Delta T}{T}$. Určete amplitudu bolometrické hvězdné velikosti při $\Delta R = R_\odot$, $R = 40\,R_\odot$, $\Delta T = -1000\,\mathrm{K}$, $T = 5300\,\mathrm{K}$.

Řešení: Dosadíme číselně do uvedeného vztahu $\Delta m_{\mathrm{b}} = -2{,}17\frac{1}{40} + 4{,}34\frac{1000}{5300} = 0{,}77\,\mathrm{mag}$.

Úloha 9.8 Nechť jasnost zvolené modelové cefeidy se mění o 2 mag. Je-li její efektivní povrchová teplota 6 000 K v maximu a 5 000 K v minimu, jak se mění poloměr?

Řešení: Platí aplikace Stefanova-Boltzmannova zákona $L_{\mathrm{max}} = 4\pi R_{\mathrm{min}}^2 \sigma T_{\mathrm{ef\,max}}^4$ a $L_{\mathrm{min}} = 4\pi R_{\mathrm{max}}^2 \sigma T_{\mathrm{ef\,min}}^4$, dále $\Delta m = -2{,}5 \log \frac{L_{\mathrm{min}}}{L_{\mathrm{max}}} = -5 \log \frac{R_{\mathrm{min}}}{R_{\mathrm{max}}} - 10 \log \frac{T_{\mathrm{min}}}{T_{\mathrm{max}}}$. Dostáváme $\log \frac{R_{\mathrm{min}}}{R_{\mathrm{max}}} = -0{,}2\,\Delta m - 2 \log \frac{T_{\mathrm{min}}}{T_{\mathrm{max}}}$, po dosazení $\log \frac{R_{\mathrm{min}}}{R_{\mathrm{max}}} = -0{,}24 \Rightarrow R_{\mathrm{min}} = 0{,}57\,R_{\mathrm{max}}$.

Úloha 9.9 U cefeid populace I ze vztahu perioda – zářivý výkon vyplývá závislost mezi absolutní hvězdnou velikostí M a periodou T: $M = -2{,}76 \log T_{\mathrm{dny}} - 1{,}37$. Jaká je vzdálenost cefeidy, jestliže činí její perioda pulsace $T = 5{,}3$ dne a střední pozorovaná hvězdná velikost je $m = 3{,}9\,\mathrm{mag}$.

Řešení: Nejprve určíme z uvedeného vztahu absolutní hvězdnou velikost $M = -2{,}76 \log T_{\mathrm{dny}} - 1{,}37 = -3{,}38\,\mathrm{mag}$. Vzdálenost stanovíme dosazením do vztahu $r = 10^{\frac{m-M}{5}+1} = 10^{2{,}46} = 285\,\mathrm{pc}$.

Úloha 9.10 U cefeidy z Velkého Magellanova mračna byla zjištěna pozorovaná hvězdná

velikost $m = 14{,}3\,\mathrm{mag}$ při periodě pulsace $T = 10{,}0\,\mathrm{dne}$. Stanovte vzdálenost cefeidy a tím i celé galaxie.

Řešení: Nejprve určíme z uvedeného vztahu absolutní hvězdnou velikost $M = -2{,}76 \log T_{\mathrm{dny}} - 1{,}37 = -4{,}13\,\mathrm{mag}$. Vzdálenost stanovíme dosazením do vztahu $r = 10^{\frac{m-M}{5}+1} = 10^{4{,}68} = 48\,\mathrm{kpc}$.

Úloha 9.11 Absolutní vizuální hvězdná velikost hvězd typu RR Lyrae dosahuje $M_{\mathrm{v}} = (0{,}6 \pm 0{,}3)\,\mathrm{mag}$. Jaká je relativní chyba vzdálenosti?

Řešení: Pro vzdálenost platí $r = 10^{\frac{m_{\mathrm{v}}-M_{\mathrm{v}}}{5}+1}$, dále obdržíme $\frac{\Delta r}{r} = -0{,}46\,\Delta M_{\mathrm{v}}$.

Úloha 9.12 Bolometrická hvězdná velikost dlouhoperiodických proměnných m_{bol} se mění o 1 mag, v maximu efektivní povrchová teplota dosahuje 4 500 K. Jaká je teplota v minimu, jde-li pouze o teplotní změny hvězdy? Zůstává-li teplota konstantní, jaké jsou relativní změny poloměru?

Řešení: V prvním případě platí $m_{\mathrm{bol}} = -10 \log \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$, odtud po dosazení obdržíme $\log T_{\min} = 3{,}55$, $T_{\min} = 3\,550\,\mathrm{K}$. V druhém případě platí $\log \frac{R_{\min}}{R_{\max}} = -0{,}2\,\Delta m_{\mathrm{bol}}$, tedy $\frac{R_{\min}}{R_{\max}} = 0{,}63$.

Úloha 9.13 Určování vzdálenosti a poloměru cefeid Baadeovou-Wesselinkovou metodou vychází ze srovnání naměřených změn úhlového poloměru při expanzi fotosféry (měření posuvu v optickém spektru absorpčních čar, umožňující určit změna poloměru fotosférických vrstev, kde dochází k formování čar) cefeidy proměřením radiální rychlosti. Stanovte vzdálenost hvězdy η Aql, jestliže z pozorování bylo určeno $\Delta R = 7{,}6\,R_{\odot}$ a $\Delta\theta = 0{,}2\,\mathrm{mas}$.

Řešení: Pro vzdálenost r platí vztah $r = \frac{9{,}305 \Delta R}{\Delta\theta}$, kde r je v pc, změna poloměru R v $R_{\odot}$ a změna úhlového poloměru θ v mas. Dosazením obdržíme $r = 354\,\mathrm{pc}$.

Úloha 9.14 U hvězdy δ Cep byla zjištěna změna úhlového poloměru $\Delta\theta = 0{,}075\,\mathrm{mas}$ a vzdálenost $r = 285\,\mathrm{pc}$. Stanovte hodnotu změny poloměru ΔR.

Řešení: Pro vzdálenost r platí vztah $r = \frac{9{,}305 \Delta R}{\Delta\theta}$, odtud $\Delta R = \frac{\Delta\theta\, r}{9{,}305}$, dosazením obdržíme $\Delta R = 2{,}3\,R_{\odot}$, což odpovídá stanovenému poměru $\frac{R_{\max}}{R_{\min}} = 1{,}119$.

Úloha 9.15 U proměnných hvězd typu RR Lyrae je pozorován tzv. Blažkův efekt, který byl původně historicky vysvětlován jako důsledek interference dvou kmitů. Jestliže hvězda kmitá s blízkými periodami P_1 a P_2, potom pro periodu Π odpovídající interferenci obou kmitů platí $\frac{1}{\Pi} = \frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}$. Tedy za čas Π proběhne n základních kmitů $\Pi = nP_1$ a $\Pi = (n+1)\,P_2$. Vyloučením n z rovnic obdržíme výše uvedený vztah. U proměnné hvězdy XZ Cyg bylo z pozorování zjištěno $P_1 = 0{,}470\,\mathrm{dne}$ a $\Pi = 54{,}945\,\mathrm{dne}$. Stanovte P_2.

Řešení: Dosadíme do vztahu $\frac{1}{\Pi} = \frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}$ vyjádříme P_2 a dosazením obdržíme $P_2 = 0{,}466\,\mathrm{dne}$.

Úloha 9.16 U proměnné hvězdy δ Sct bylo z pozorování zjištěno $P_1 = 0{,}193775\,\mathrm{dne}$ a $P_2 = 0{,}186871\,\mathrm{dne}$. Stanovte interferenční periodu Π.

Řešení: Dosadíme do vztahu $\frac{1}{\Pi} = \frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}$ a určíme vyjádříme $\Pi =$ 5,248 dne.

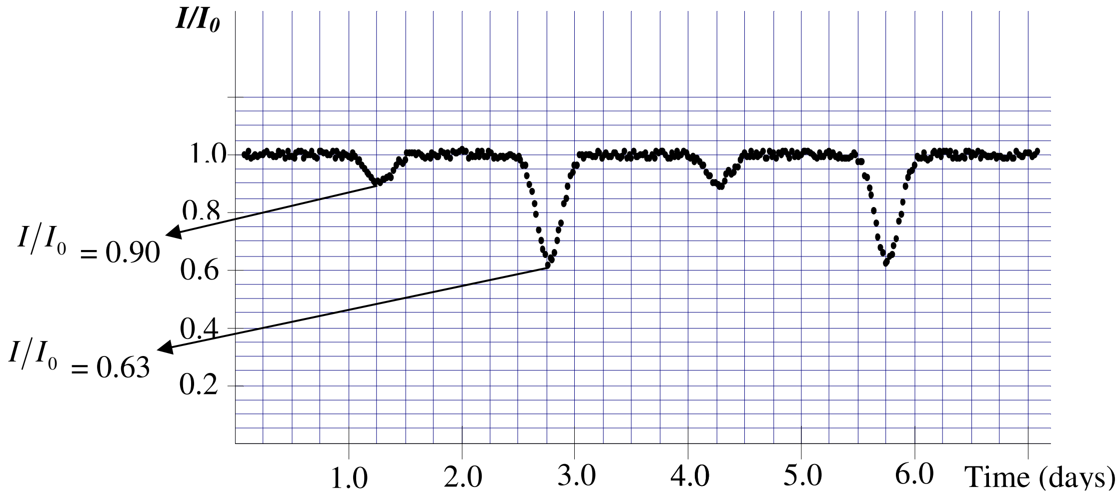
Úloha 9.17 U hvězdy δ Cep je perioda změn jasnosti 5,3 dne, průměrná hvězdná velikost dosahuje zhruba 3,9 mag a její změny činí $\pm$0,35 mag. S ohledem na tato data lze jasnost hvězdy v závislosti na čase t, kde t je ve dnech, modelovat funkcí $j\,(t) = 3{,}9 + 0{,}35 \sin\left(\frac{2\pi t}{5{,}3}\right)$. Vyjádřete s přesností na dvě desetinná místa jasnosti hvězdy v prvních třech dnech.

Řešení: Při $t = 0$, $j\,(0) = 3{,}90$ mag, $t = 1$, $j\,(1) = 4{,}22$ mag, $t = 2$, $j\,(2) = 4{,}15$ mag.

Úloha 9.18 Pro cefeidy platí tzv. $P{-}R$ vztah vyjadřující závislost mezi poloměrem a periodou pulsace ve tvaru $\log R = a + b \log P$, kde R vyjadřujeme v $R_\odot$ a periodu P ve dnech. Nalezněte poloměr hvězdy ς Gem, jestliže známe teoreticky odvozené hodnoty $a = 1{,}188$, $b = 0{,}655$, z pozorování byla zjištěna hodnota $P = 10{,}1507$ dne.

Řešení: Dosadíme do vztahu $\log R = a + b \log P$, odkud obdržíme $R = 70\,R_\odot$, což je ve velmi dobré shodě s hodnotou, kterou bychom dostali Baadeovou-Wesselinkovou metodou, viz úloha 9.13.

Úloha 9.19 Předpokládejme dvě hvězdy obíhající kolem společného hmotného středu po kruhových drahách s konstantní úhlovou rychlostí. Pozorujeme je ze Země přímo v dráhové rovině dvojhvězdy. Hvězdy se vyznačují povrchovými teplotami T_1 a T_2, $T_1 > T_2$, jejich poloměr je R_1, R_2, $R_1 > R_2$. Světelná křivka soustavy je na obrázku.



Minimální intenzita dosahuje 90 % respektive 63 % celkové intenzity I_0 obou hvězd $I_0 = 4{,}8 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. Nalezněte periodu oběžného pohybu hvězd a úhlovou rychlost rotace soustavy. Za předpokladu platnosti Stefanova-Boltzmannova zákona pro záření hvězd určete poměry T_1/T_2, R_1/R_2.

Řešení: Perioda $P = 3{,}0$ dne $= 2{,}6{\cdot}10^5$ s, $\omega = \frac{2\pi}{P} = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Zavedeme $\frac{I_1}{I_0} = \alpha = 0{,}90$ a $\frac{I_2}{I_0} = \beta = 0{,}63$, odtud platí $\frac{I_0}{I_1} = 1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \frac{1}{\alpha}$ a $\frac{I_2}{I_1} = 1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4\right] = \frac{\beta}{\alpha}$. Po úpravách obdržíme $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\beta}} = 1{,}6$ a $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} = 1{,}4$.

Úloha 9.20 Ve spektru dvojhvězdy byla pozorována absorpční čára sodíku D_1 o laboratorní vlnové délce $\lambda = 589{,}59$ nm. V důsledku pohybu obou hvězd a následného posuvu polohy této čáry byly zjištěny údaje z tabulky:

t [den]	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4
λ_1 [nm]	589,75	589,77	589,72	589,62	589,51	589,43	589,41	589,46
λ_2 [nm]	589,31	589,28	589,37	589,62	589,73	589,87	589,90	589,81
t [den]	2,7	3,0	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8
λ_1 [nm]	589,56	589,67	589,73	589,77	589,72	589,62	589,50	589,43
λ_2 [nm]	589,64	589,45	589,31	589,28	589,37	589,62	589,74	589,87

S využitím tabulky nalezněte oběžné rychlosti v_1 a v_2 jednotlivých hvězd, poměr hmotností M_1/M_2 a hmotnost každé hvězdy, vzdálenosti r_1 a r_2 jednotlivých hvězd od hmotného středu soustavy a vzdálenost r obou hvězd.

Řešení: Platí Dopplerův vztah $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$. Maximální a minimální vlnové délky jsou $\lambda_{1\max} = 589{,}77$ nm, $\lambda_{1\min} = 589{,}41$ nm a $\lambda_{2\max} = 589{,}90$ nm, $\lambda_{2\min} = 589{,}28$ nm. Rozdíly $\Delta\lambda_1 = 0{,}36$ nm a $\Delta\lambda_2 = 0{,}62$ nm. Odtud získáme $v_1 = c\frac{\Delta\lambda_1}{2\lambda_0} = 9{,}2 \cdot 10^4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $v_2 = c\frac{\Delta\lambda_2}{2\lambda_0} = 1{,}6 \cdot 10^5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Pro poměr hmotností $\frac{M_1}{M_2} = \frac{v_2}{v_1} = 1{,}7$. Platí $r = \frac{v}{\omega}$, určíme $r_1 = 3{,}8 \cdot 10^9$ m a $r_2 = 6{,}5 \cdot 10^9$ m, $r = r_1 + r_2 = 10^{10}$ m. Hmotnosti jednotlivých hvězd stanovíme ze vztahu $G\frac{M_1M_2}{r^2} = M_1\frac{v_1^2}{r_1}$ a obdobně pro druhou složku. Získáme $M_1 = \frac{r^2v_2^2}{Gr_2}$ a $M_2 = \frac{r^2v_1^2}{Gr_1}$, dosazením $M_1 = 6 \cdot 10^{30}$ kg a $M_2 = 3 \cdot 10^{30}$ kg.

Úloha 9.21 Určete periodu změn jasnosti modelové zákrytové dvojhvězdy, jestliže některá minima byla pozorována v následujících okamžicích, vyjádřených v *juliánských dnech*

2416604,701	2418112,739
2416641,572	2418138,548
2417334,753	2418477,764

Řešení: Analýzou časových údajů v J.D. nalezneme periodu $P = 3{,}68713$ dne.

Úloha 9.22 Určete periodu změn jasnosti zákrytové dvojhvězdy GS Cep, jejíž fotometrická měření dala následující časové údaje minim v *juliánských dnech*

2447414,4350	2447776,4542
2448060,4842	2448085,4936
2448088,4363	2448102,4202

Řešení: Analýzou časových údajů v J.D. nalezneme periodu $P = 1{,}471625$ dne.

Úloha 9.23 Jakou maximální a minimální možnou amplitudu změny jasnosti zákrytové proměnné soustavy můžeme určit soudobou fotometrickou technikou, skládá-li se soustava ze dvou hvězd o povrchové teplotě 6 000 K, jedna z nich je obrem o absolutní hvězdné velikosti 0 mag.

Zákryt předpokládáme centrální, hvězdy považujme za sférickosymetrické. Přesnost detekce fotometrických změn v současné době je 0,005 mag. Okrajové ztemnění u hvězd zanedbáváme.

Řešení: Amplitudy změn jasnosti při zákrytu hvězdy s menším poloměrem za s větším poloměrem a naopak při průchodu hvězdy s menším poloměrem před s větším jsou stejné a lze je popsat vztahem $\Delta m = -2{,}5 \log \frac{R_v^2}{R_v^2 + R_m^2} = -2{,}5 \log \frac{10^{-0{,}4 M_v}}{10^{-0{,}4 M_v} + 10^{-0{,}4 M_m}}$, kde R_v a R_m jsou poloměry větší a menší hvězdy, M_v a M_m jejich absolutní hvězdné velikosti. Při stejných teplotách obou hvězd je větší jasnější. Maximální amplituda změn jasnosti zákrytové proměnné nastane tehdy, jestliže druhá hvězda bude mít stejný poloměr a absolutní hvězdnou velikost jako hvězda první. Amplituda je rovna $\Delta m_1 = -2{,}5 \log \left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}753$ mag, soudobá fotometrická technika umožňuje určovat jasnosti na tři desetinná čísla.

Minimální amplituda změn jasnosti při centrálním zákrytu nastane při maximálním rozdílu poloměrů a absolutních hvězdných velikostí. Nechť druhá složka se vyznačuje malým poloměrem a nízkou jasností. Například jde o hvězdu hlavní posloupnosti slunečního typu, s absolutní hvězdnou velikostí 5 mag, podtrpaslíka s absolutní hvězdnou velikostí 6 mag, respektive bílého trpaslíka s nízkou jasností. První složkou může být veleobr Ia o absolutní hvězdné velikosti −8 mag. Proto minimální amplituda změn jasností zákrytové proměnné je rovna $\Delta m_2 = -2{,}5 \log \frac{10^{0{,}4 \cdot 8}}{10^{0{,}4 \cdot 8} + 10^{0{,}4 \cdot 0}} = 0{,}0007$ mag. Tato veličina je podstatně menší než měřitelné možnosti soudobé fotometrie. Proto existují zákrytové proměnné, jejichž změnu jasnosti fotometricky nemůžeme zjistit, minimální detekovaná amplituda je nulová.

Úloha 9.24 Zákrytová proměnná hvězda každých 30 dnů zmenšuje svoji jasnost o 0,2 mag, při čemž všechna minima jsou stejná. Spektroskopická pozorování ukázala, že čára H_α o laboratorní vlnové délce $\lambda = 656{,}3$ nm je zdvojená, její složky se periodicky rozdvojují na 0,2 nm. Předpokládejme centrální zákryt, střední hustoty obou složek jsou stejné, určete poměr jejich hmotností. Okrajové ztemnění hvězd zanedbáváme.

Řešení: Stejné hlavní a vedlejší minimum zákrytové proměnné znamenají, že obě složky mají stejnou jasnost, tudíž shodné efektivní povrchové teploty. Označíme R_v a R_m poloměry větší a menší hvězdy, pro velikost minim platí $\Delta m = -2{,}5 \log \frac{\pi R_v^2}{\pi R_v^2 + \pi R_m^2} = 2{,}5 \log \left(1 + \frac{R_m^2}{R_v^2}\right)$. Odtud nalezneme poměr poloměrů hvězd $\frac{R_m}{R_v} = \sqrt{10^{0{,}4 \Delta m} - 1} = 0{,}45$. Z podmínky shodných hustot můžeme určit poměr jejich hmotností $\frac{M_m}{M_v} = \left(\frac{R_m}{R_v}\right)^3 = 0{,}091 = \frac{1}{11}$.

Minima nastávají za stejné časové intervaly, tudíž dráhy obou složek jsou kruhové, oběžná doba je 60 dnů. Při centrálním zákrytu můžeme stanovit z pozorování čáry H_α rychlost hvězd. Platí $v = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 91{,}4\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Odtud stanovíme vzdálenost mezi hvězdami $a = \frac{vT}{2\pi} = 7{,}5 \cdot 10^7\,\mathrm{km} = 0{,}5\,\mathrm{AU}$. Znalost velké poloosy umožňuje určení součtu hmotností obou složek $M_v + M_m = \frac{a^3}{T^2} = 4{,}6$ a odtud $M_v = 4{,}2\,M_\odot$ a $M_m = 0{,}4\,M_\odot$.

Úloha 9.25 Určete u modelové zákrytové dvojhvězdy poměr poloměrů $\frac{R_A}{R_B}$, je-li poměr teplot $\frac{T_A}{T_B} = 2$ a klesne-li hvězdná velikost při centrálním zákrytu hvězdy A hvězdou B o 2,5 mag vzhledem k celkové hvězdné velikosti obou hvězd.

Řešení: Vyjdeme ze vztahu $\frac{L_A}{L_B} = \frac{4\pi R_A^2 \sigma T_A^4}{4\pi R_B^2 \sigma T_B^4} = 16 \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2$ a $-2{,}5 = -2{,}5 \log \frac{L_A + L_B}{L_B}$, odkud $\frac{L_A}{L_B} = 9$. Při numerickém dosazení dostáváme $\frac{R_A}{R_B} = 0{,}75$.

Úloha 9.26 Modelová zákrytová dvojhvězda má oběžnou dobu $P = 2$ dny 22 hodin. Doba

částečného zatmění je 18 hodin a úplného 4 hodiny. Nalezněte poloměry hvězd prostřednictvím poloměru dráhy a oběžné doby, jestliže ze spektroskopických údajů byla zjištěna relativní oběžná rychlost $200\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Řešení: Platí vztahy $\frac{t_4-t_1}{P}=\frac{R_v+R_m}{\pi r}$, $\frac{t_3-t_2}{P}=\frac{R_v-R_m}{\pi r}$, $2\pi r = Pv$. Z posledního vztahu obdržíme $r=\frac{Pv}{2\pi}= 8\cdot10^9\,\mathrm{m}$, $R_v = 7{,}9\cdot10^9\,\mathrm{m}$, $R_m = 5{,}0\cdot10^9\,\mathrm{m}$.

Úloha 9.27 Na základě fotometrických pozorování zákrytové trpasličí dvojhvězdy AA Dor byly zjištěny čtyři doby kontaktů $t_1 = 0{,}3400\,\mathrm{dne}$, $t_2 = 0{,}3462\,\mathrm{dne}$, $t_3 = 0{,}3510\,\mathrm{dne}$, $t_4 = 0{,}3576\,\mathrm{dne}$. Oběžná doba dvojhvězdy je $0{,}261540\,\mathrm{dne}$. Určete relativní poloměry obou hvězd za zjednodušujícího předpokladu $i = 90°$, r je vzdálenost složek.

Řešení: Řešíme rovnice $\frac{t_4-t_1}{P}=\frac{R_v+R_m}{\pi r}$, $\frac{t_3-t_2}{P}=\frac{R_v-R_m}{\pi r}$, odkud získáme $R_v = 0{,}135\,r$ a $R_m = 0{,}077\,r$.

Úloha 9.28 U zákrytové dvojhvězdy 2MASS J05352184-0546085 byly určeny z fotometrického proměření světelných křivek a křivek radiálních rychlostí následující parametry: $K_1 = 18{,}5\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $K_2 = 29{,}3\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $P = 9{,}779621\,\mathrm{dne}$, $i = 89{,}2°$, $a\sin i = 0{,}0406$. Určete hmotnosti jednotlivých složek M_1, M_2, a_1, a_2.

Řešení: Nejprve určíme $a=\frac{0{,}0406}{\sin i} = 6{,}15\cdot10^9\,\mathrm{m}$. Dále platí $M_1+M_2=\frac{a^3}{P^2}\frac{4\pi^2}{G}$, $M_1+M_2 = 1{,}9\cdot10^{29}\,\mathrm{kg}$. Platí $\frac{K_1}{K_2}=\frac{M_2}{M_1}$, odtud $M_1 = 0{,}058\,M_\odot$, $M_2 = 0{,}037\,M_\odot$. Parametr $q=\frac{M_2}{M_1} = 0{,}631$, následně $a_1=\frac{q}{1+q}\,a$, dále $a_2=\frac{1}{1+q}\,a$. Po dosazení obdržíme $a_1 = 2{,}36\cdot10^9\,\mathrm{m}$, $a_2 = 3{,}73\cdot10^9\,\mathrm{m}$.

Úloha 9.29 Ve spektru modelové zákrytové proměnné hvězdy, jejíž jasnost se mění s periodou $P = 3{,}953\,\mathrm{dne}$, se spektrální čáry vzhledem k normálním vlnovým délkám periodicky posouvají na opačné strany, ze spektroskopických měření bylo zjištěno $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_1 = 1{,}9\cdot10^{-4}$ a $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_2 = 2{,}9\cdot10^{-4}$. Určete hmotnosti jednotlivých složek.

Řešení: Střední oběžná rychlost první složky je $v_1 = c\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_1 = 57\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, druhé složky je $v_2 = c\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_2 = 87\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Velikost $a_1=\frac{v_1}{2\pi}P = 3{,}1\cdot10^6\,\mathrm{km}$, $a_2=\frac{v_2}{2\pi}P = 4{,}7\cdot10^6\,\mathrm{km}$. Dále platí $a = a_1 + a_2 = 7{,}8\cdot10^6\,\mathrm{km}$. Dosazením do III. Keplerova zákona a úpravou získáme $M_1+M_2=\frac{a^3}{P^2}\frac{4\pi^2}{G}$, odkud po dosazení $M_1 + M_2 = 2{,}4\cdot10^{30}\,\mathrm{kg} = 1{,}2\,M_\odot$. Při platnosti $M_1a_1 = M_2a_2$ obdržíme $M_1 = 0{,}7\,M_\odot$ a $M_2 = 0{,}5\,M_\odot$.

10 Pozdní stadia vývoje hvězd, novy, supernovy

Úloha 10.1 Červený obr o poloměru $10^2\,R_\odot$ se nachází ve vývojovém stadiu, kdy vodík v centrální části již vyhořel na helium, ale hoření samotného helia ještě nezačalo. Hlavním zdrojem energie je hoření vodíku v slupce obklopující heliové jádro. Vodíková slupka ve vzdálenosti $(1{,}8 - 2{,}0)\cdot 10^7$m se vyznačuje hustotou $5\cdot 10^4$kg $\cdot$ m^{-3} a teplotou $5\cdot 10^7$K. Určete zářivý výkon a efektivní povrchovou teplotu červeného obra. Při výpočtu uvolňované energie volte $X \cong 0{,}5$, $X_{\mathrm{CN}} \cong 0{,}005$.

Řešení: Energie, uvolňovaná za časovou jednotku v jednotkové hmotnosti hvězdné látky [W $\cdot$ kg^{-1}] při CNO cyklu, který je dominantní při zadané teplotě je dána vztahem

$$\epsilon_{\mathrm{CNO}} = 3{,}4\cdot 10^{29}\rho X\, X_{\mathrm{CNO}} \left(\frac{10^6}{T}\right)^{2/3} \exp\left[-152{,}3\left(\frac{10^6}{T}\right)^{1/3}\right].$$

Ve slupkovém zdroji o objemu 10^{22}m^3 je uvolňovaná energie za sekundu v jednotkovém objemu $4\cdot 10^7$J $\cdot$ m$^{-3}\cdot$ s^{-1}, zářivý výkon červeného obra je $4\cdot 10^{29}$W $\cong 10^3\,L_\odot$. Při zadaném poloměru $7\cdot 10^{10}$m je efektivní povrchová teplota obra 3 300 K.

Úloha 10.2 Určete gravitační potenciální energii vnější konvektivní obálky červeného obra Arktura, u kterého je hmotnost jádra $M_{\mathrm{J}} = 0{,}8\,M_\odot$ a vnější obálky $M_{\mathrm{ob}} = 0{,}3\,M_\odot$, poloměr dosahuje $30\,R_\odot$. Stanovte celkovou energii hvězdy.

Řešení: Gravitační potenciální energie je rovna $E_{\mathrm{p}} = -GM_{\mathrm{J}}M_{\mathrm{ob}}/R = -3{,}0\cdot 10^{39}$ J. Za předpokladu $\gamma = 5/3$ má viriálová věta tvar $2\langle E_{\mathrm{k}}\rangle + \langle E_{\mathrm{p}}\rangle = 0$. Celková energie hvězdy – červeného obra je $\langle E_{\mathrm{c}}\rangle = \langle E_{\mathrm{k}}\rangle + \langle E_{\mathrm{p}}\rangle = -1{,}5\cdot 10^{39}$ J.

Úloha 10.3 Modelový červený obr má poloměr $20\,R_\odot$. Kompaktní jádro o hmotnosti $M_{\mathrm{j}} = 0{,}6\,M_\odot$ je obklopeno rozsáhlou vnější konvektivní obálkou o hmotnosti $M_{\mathrm{ob}} = 0{,}2\,M_\odot$. Určete gravitační potenciální energii obálky! Aplikací viriálové věty, za předpokladu $\gamma = 5/3$ stanovte tepelnou energii E_{k} plynu. Za zjednodušujícího předpokladu, že obálka je složena z plně ionizovaného vodíku, určete velikost energie, která by se uvolnila při ochlazování a rekombinaci na neutrální vodík. Rekombinační energie je 13,6 eV.

Řešení: Gravitační potenciální energie je $E_{\mathrm{p}} \cong -GM_{\mathrm{j}}M_{\mathrm{ob}}/R \cong -2{,}3\cdot 10^{39}$ J. Při platnosti viriálové věty $\langle E_{\mathrm{p}}\rangle + 2\langle E_{\mathrm{k}}\rangle = 0$ obdržíme $E_{\mathrm{k}} \cong 1{,}15\cdot 10^{39}$ J. Celková rekombinační energie obálky je $E_{\mathrm{rek}} = \frac{M_{\mathrm{ob}}}{m_{\mathrm{H}}} 2{,}18\cdot 10^{-18} = 5{,}2\cdot 10^{38}$ J.

Úloha 10.4 Hmotnost jádra atomu uhlíku ${}^{12}_{6}$C je $m_{\mathrm{C}} = 1{,}99\cdot 10^{-26}$ kg, hořčíku ${}^{24}_{12}$Mg je $m_{\mathrm{Mg}} = 3{,}96\cdot 10^{-26}$ kg. Předpokládejte, že hvězda o hmotnosti $M = 10\,M_\odot$ a zářivém výkonu $L = 10^7\,L_\odot$ v nitru přemění 10 % hmotnosti uhlíku na hořčík v průběhu svého vývoje. Jaká je doba života hvězdy v tomto vývojovém stadiu?

Řešení: Počet atomů uhlíku je $N = 0{,}1M/m_{\mathrm{C}} = 10^{56}$. Celková uvolněná energie je $W = (Nm_{\mathrm{C}} - Nm_{\mathrm{Mg}}/2)\,c^2 = 10^{45}$ J. Přepokládáme-li, že veškerá uvolněná energie se vyzáří a že hvězda bude vyzařovat stále stejným zářivým výkonem, potom její doba života v tomto stadiu je $t = E/L = 3\cdot 10^{11}$ s $= 10^4$ roků.

Úloha 10.5 Dokažte, že pro úbytek hmotnosti hvězd v pozdních stadiích vývoje platí $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \sim \frac{L}{gR}$, respektive $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \sim \frac{LR}{M}$. Při přesnějších kvantitativních výpočtech používáme Reimersův vztah $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \cong -4 \cdot 10^{-13} \frac{L}{gR}$, kde L, g, R dosazujeme v patřičných jednotkách Slunce, úbytek hmotnosti je v $M_\odot \cdot \mathrm{rok}^{-1}$. Odhadněte úbytek hmotnosti hvězdy asymptotické větve obrů o hmotnosti $1\,M_\odot$, zářivém výkonu $7 \cdot 10^3 L_\odot$ a teplotě 3 000 K.

Řešení: Platí $E_p \sim \frac{M^2}{R}$, $L \sim \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{M^2}{R}\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \sim \frac{LR}{M}$. Ze Stefanova-Boltzmannova zákona určíme poloměr $310\,R_\odot$, dále stanovíme $g = 10^{-5} g_\odot$ a dosazením obdržíme $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \cong 10^{-6} M_\odot \cdot \mathrm{rok}^{-1}$.

Úloha 10.6 Zářivý výkon hvězdného větru je dán jeho kinetickou energií $L_\nu = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}v^2$ za sekundu. Odhadněte zářivé výkony hvězdného větru o rychlosti $v \cong 25\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ u veleobra Betelgeuze $15\,M_\odot$, $1160\,R_\odot$, $2 \cdot 10^5\,L_\odot$.

Řešení: Pro hvězdný vítr platí $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -4 \cdot 10^{-13} \frac{LR}{M} \cong 6 \cdot 10^{-6} M_\odot \cdot \mathrm{rok}^{-1}$. Zářivý výkon větru při zadané rychlosti je roven $L_\nu \cong 10^{26}$W, zatímco samotné hvězdy $L_\mathrm{B} \cong 10^{32}$W.

Úloha 10.7 Podle Kraftova výkladu z r. 1963 je jev novy výsledkem termonukleární exploze obálky na povrchu bílého trpaslíka, která na něj byla přenesena ze sousední hvězdy bohaté na vodík. Určete hmotnost látky vstupující do reakce, jestliže budeme předpokládat, že při explozi se uvolňuje energie 10^{39}J.

Řešení: Při eplozivním spalování vodíku je koeficient účinnosti uvolňování energie přibližně 1%, množství určíme ze vztahu $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \cong \frac{10^{41}}{10^{17}} \cong 10^{24}$kg.

Úloha 10.8 Uvažujme vrstvu vodíku o hmotnosti $10^{-6} M_\odot$ na povrchu bílého trpaslíka. Vodík se při termonukleárních reakcích přemění na helium. Jak dlouhou dobu bude nova zářit, jestliže předpokládáme, že její zářivý výkon je roven eddingtonovskému? V chemickém složení uvažujeme pouze vodík, pro opacitu platí $\kappa \cong (1 + X)\ 0{,}02\,\mathrm{m^2 \cdot kg^{-1}}$, při $X = 1$ dostaneme $\kappa \cong 0{,}04\,\mathrm{m^2 \cdot kg^{-1}}$.

Řešení: Při reakcích přeměny vodíku na helium, kdy ze čtyř protonů vzniká jádro helia, je množství energie uvolňované při vzniku jednoho jádra helia $4{,}3 \cdot 10^{-12}$J. Ve vrstvě vodíku o hmotnosti $2 \cdot 10^{24}$kg je zhruba $\frac{2 \cdot 10^{24}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} \cong 10^{51}$ protonů. Celková uvolněná energie je $\frac{1}{4}\, 4{,}3 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{51}\,\mathrm{J} \cong 10^{39}$J. Pro Eddingtonovu limitu zářivého výkonu platí $L_\mathrm{Ed} \cong \frac{4\pi GcM}{\kappa} \cong 10^{31}$W. Nova stejným výkonem může zářit $\frac{10^{39}}{10^{31}} \cong 10^8\,\mathrm{s} \cong 3$ roky.

Úloha 10.9 Při hoření vodíku na povrchu bílého trpaslíka se uvolňuje energie $E = 10^{39}$ J. Velikost uvolňované energie na hmotností jednotku je $\epsilon = 6{,}42 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$. Jaké množství vodíku je při explozi spáleno?

Řešení: $M_\mathrm{vod} = E/\epsilon = 1{,}6 \cdot 10^{24}$ kg, což přibližně odpovídá hmotnosti Venuše.

Úloha 10.10 Explozivní hoření na dně tenké vodíkem bohaté vrstvy na povrchu bílého trpaslíka může eventuálně vrcholit expanzí této vrstvy. Pro bílého trpaslíka o hmotnosti $M = M_\odot$ a s poloměrem $R \approx 0{,}01\,R_\odot$ vypočtěte zlomek f hmotnosti vrstvy, která bude přeměněna na

helium a dodá energii nezbytnou na expanzi, předpokládejme, že vrstva má sluneční chemické složení. Odvoďte závislost f na M pro $M < M_{\mathrm{Ch}}$.

Řešení: Nechť $\Delta M \ll M$. Energie uvolňovaná z této vrstvy je rovna gravitační vazebné energii $G\frac{M\Delta M}{R(M)}$. Jestliže Q je energie uvolňovaná v jednotkové hmotnosti při vodíkovém hoření, $Q \approx 6 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$, $X_\odot \approx 0{,}7$. Velikost hořící vodíkové látky je $f\Delta M X_\odot$, platí $G\frac{M\Delta M}{R(M)} = f\Delta M X_\odot Q$. Vztah $R(M)$ pro bílé trpaslíky, použitý pro nerelativistickou stavovou rovnici, při $M < M_{\mathrm{Ch}}$, může být kalibrován $\frac{R}{0{,}01 R_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/3}$. Kombinací uvedených vztahů dostaneme $f = \frac{GM_\odot}{0{,}01 R_\odot X_\odot Q}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{4/3} \approx 0{,}045\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{4/3}$. Pro typické bílé trpaslíky je zlomek velmi malý, proti působí výrazné gravitační síly.

Úloha 10.11 Na povrchu bílého trpaslíka o hmotnosti $1\,M_\odot$ a poloměru $2 \cdot 10^{-2}\,R_\odot$ se nachází vrstva vodíku o hmotnosti $10^{-4} M_\odot$. Porovnejte gravitační potenciální energii trpaslíka před výbuchem novy s kinetickou energií expandujících vrstev po výbuchu, jestliže předpokládáme, že se tyto vrstvy vzdalují rychlostí $1000\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ od povrchu bílého trpaslíka, přičemž expanduje pouze 10% hmoty vodíkové vrstvy.

Řešení: Gravitační potenciální energie $E_p = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = -1{,}1 \cdot 10^{43}\,\mathrm{J}$ v absolutní hodnotě výrazně převyšuje kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2} M_{\mathrm{ex}} v^2 = 10^{37}\,\mathrm{J}$ expandujících vnějších vrstev. Bílý trpaslík zůstává zachován, exploze se může vícekrát opakovat jako u rekurentních nov.

Úloha 10.12 Pozorovatelé obdrželi zprávu, že v galaxii MCG+09-16-034 ve vzdálenosti 400 Mpc explodovala supernova typu Ia s předpokládanou absolutní hvězdnou velikostí $M_{\mathrm{B}} = -19{,}5\,\mathrm{mag}$. Mohou astronomové dalekohledem vybaveným CCD technikou s limitní hvězdnou velikostí zařízení $m_{\mathrm{B}} = 19{,}0\,\mathrm{mag}$ tuto supernovu pozorovat?

Řešení: Dosazením do vztahu $m = 5\log r - 5 + M = 18{,}5\,\mathrm{mag}$ zjistíme, že dalekohledem lze supernovu sledovat.

Úloha 10.13 U supernovy 1972 E typu Ia byla zjištěna pozorovaná hvězdná velikost $m_{\mathrm{B}} = 8{,}5\,\mathrm{mag}$. Při předpokladu její absolutní hvězdné velikosti $M_{\mathrm{B}} = -19{,}5\,\mathrm{mag}$ určete vzdálenost vnější galaxie NGC 5253, kde se supernova nachází.

Řešení: Nejprve stanovíme modul vzdálenosti $m - M = 28{,}0\,\mathrm{mag}$. Ze vztahu $m - M = 5\log r - 5$ při zjednodušujícím předpokladu zanedbání mezigalaktické absorpce určíme vzdálenost $r = 4{,}0\,\mathrm{Mpc}$.

Úloha 10.14 Při výbuchu novy platí zákon zachování hybnosti pro expandující obálku ve tvaru $\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho + M_0\right) v = M_0 v_0$, kde r je vzdálenost obálky od hvězdy, ρ je hustota mezihvězdného prostředí, M_0 je hmotnost obálky, v je rychlost obálky ve vzdálenosti r a v_0 počáteční rychlost expanze obálky. Dosazením $v = \frac{dr}{dt}$ a následnou integrací obdržíme $\frac{1}{3}\pi r^4 \rho + M_0 r = M_0 v_0 t$, což je vztah určující poloměr obálky v závislosti na čase. Určete, za jaký čas se rychlost expandující obálky zmenší na polovinu. Jsou zadány $\rho = 3 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $v_0 = 1000\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$, $M_0 = 10^{-4} M_\odot$.

Řešení: Ze zákona zachování hybnosti plyne $v = \frac{1}{2} v_0$ jestliže $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = M_0$. Dosadíme dále a obdržíme $t = \frac{5}{4 v_0}\left(\frac{3 M_0}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \cong 100\,\text{roků}$, což nastane ve vzdálenosti $r \cong 0{,}08\,\mathrm{pc}$.

Úloha 10.15 Po explozi supernovy vznikla neutronová hvězda o hmotnosti $1{,}4\,M_\odot$ a poloměru $R = 15\,\mathrm{km}$. Při procesu neutronizace se většina protonů přeměnila na neutrony. Určete gravitační potenciální energii neutronové hvězdy!

Řešení: Gravitační potenciální energie je dána hmotností a poloměrem $E_\mathrm{p} = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R} \cong -3{,}5 \cdot 10^{46}\,\mathrm{J}$.

Úloha 10.16 Určete velikost gravitační potenciální energie, která se uvolní při výbuchu supernovy.

Řešení: $E_\mathrm{sup} = E_\mathrm{nh} - E_\mathrm{poc} = \frac{3GM^2}{5R_\mathrm{nh}} - \frac{3GM^2}{5R_\mathrm{poc}} \cong \frac{3GM^2}{5R_\mathrm{nh}}$. Po dosazení $M = 2{,}8 \cdot 10^{30}\mathrm{kg}$, $R = 10^4\mathrm{m}$ obdržíme $E_\mathrm{sup} = 3 \cdot 10^{46}\mathrm{J}$. Uvolněná energie se přeměňuje na záření, na formování neutronové hvězdy, na kinetickou energii neutrin a expandující obálky. Převážnou část energie odnáší neutrina.

Úloha 10.17 U supernov I typu je pravděpodobným zdrojem energie v maximu jasnosti rozpad ${}^{56}_{28}\mathrm{Ni} \to {}^{56}_{27}\mathrm{Co} + e^+ + \nu_e + \gamma$ probíhající při explozi radioaktivního izotopu ${}^{56}_{28}\mathrm{Ni}$. Jak velká hmotnost látky obsahující izotop ${}^{56}_{28}\mathrm{Ni}$ je nezbytná pro objasnění zářivých výkonů $\cong 3 \cdot 10^{36}\mathrm{W}$ supernov v maximu? Poločas rozpadu ${}^{56}_{28}\mathrm{Ni}$ je $\tau_{1/2} = 6{,}1$ dne a energie uvolňovaná při rozpadu je $1{,}78\,\mathrm{MeV}$.

Řešení: V 1 kg niklu v čase $t = 0$ je $N_0 = \frac{1}{58{,}71}6{,}03 \cdot 10^{26}$atomů. Za 1 sekundu se rozpadne atomů $N_1 = N_0\lambda = N_0\frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} = 1{,}4 \cdot 10^{19}$. Při rozpadu 1 atomu se uvolní energie $2{,}9 \cdot 10^{-13}\mathrm{J}$. Celkový počet nezbytných rozpadů atomů za 1 sekundu je $\frac{3 \cdot 10^{36}}{2{,}9 \cdot 10^{-13}} \cong 10^{49}$, tudíž odpovídající hmotnost je $\frac{10^{49}}{1{,}4 \cdot 10^{19}} \cong 7{,}5 \cdot 10^{29}\mathrm{kg} \cong 0{,}4\,M_\odot$.

Úloha 10.18 Předpokládejte, že při explozi supernovy každé neutrino odnáší průměrnou energii $5\,\mathrm{MeV}$. Stanovte počet neutrin vzniklých při neutronizaci a velikost energie jimi odnášené.

Řešení: Za zjednodušujícího předpokladu, že každý proton vyprodukoval neutrino je počet obou částic stejný. Při hmotnosti $1{,}4 \cdot 10^{30}$ kg je počet protonů $N \approx 8{,}44 \cdot 10^{56}$, což odpovídá stejnému počtu neutrin. Celková energie všech neutrin je $7 \cdot 10^{44}\,\mathrm{J}$.

Úloha 10.19 Ve vzdálenosti 3 kpc od Země explodovala supernova typu II. Jestliže všechna neutrina unikla z neutronové hvězdy, určete jejich počet dopadající na $1\,\mathrm{m}^2$ povrchu Země. Předpokládejte, že původní hvězda měla hmotnost asi $15\,M_\odot$. Odtržením od neutronové hvězdy přibližně něco méně než $14\,M_\odot$ hmoty hvězdy expanduje do okolí. Je-li průměrná expanzní rychlost $6\,000\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ určete celkovou kinetickou energii zbytků supernovy.

Řešení: Sféra o poloměru 3 kpc má plochu $4\pi r^2 = 1{,}1 \cdot 10^{41}\,\mathrm{m}^2$, při celkovém počtu neutrin $8{,}4 \cdot 10^{56}$ obdržíme $8 \cdot 10^{15}$ neutrin na $1\,\mathrm{m}^2$. Ze znalosti průřezu Země πR_Z^2 nalezneme, že Zemí prochází 10^{30} neutrin. Exploze supernovy typu II vede k uvolnění energie $3{,}5 \cdot 10^{46}\,\mathrm{J}$, neutrina odnáší energii $7 \cdot 10^{44}\,\mathrm{J}$. Pro energii zbytků supernovy platí $\frac{1}{2}mv^2 \approx 5 \cdot 10^{44}\,\mathrm{J}$.

Úloha 10.20 Předpokládáme-li průměrnou absolutní bolometrickou hvězdnou velikost su-

pernovy v průběhu exploze $M_{\text{bol}} = -17\,\text{mag}$, určete celkové množství vyzářené energie při explozi v průběhu šesti týdnů.

Řešení: Při $M_{\text{bol}} = -17\,\text{mag}$ obdržíme pro zářivý výkon vyjádřený v jednotkách zářivého výkonu Slunce $\log L = 0{,}4(4{,}75 + 17) = 8{,}7$, tudíž $L = 5 \cdot 10^8\,L_\odot = 1{,}9 \cdot 10^{35}\,\text{W}$. Celkové množství vyzářené energie je $1{,}9 \cdot 10^{35} \cdot 3{,}6 \cdot 10^6 = 7 \cdot 10^{41}\,\text{J}$.

Úloha 10.21 Maxima jasnosti ve vizuálním oboru dosahuje supernova v okamžiku, kdy se expandující fotosféra ochladí na teplotu asi 7 000 K. Právě teploty (5 500 − 7 500) K jsou optimální pro produkci světelných kvant ve vizuálním oboru. U hvězd hlavní posloupnosti odpovídá tento teplotní rozsah spektrálním třídám mezi G5 – F0, u kterých je bolometrická korekce blízká k nule. Typické supernovy dosahují absolutních hvězdných velikostí $M_{\text{bol}} = (-16{,}0$ až $-19{,}0)\,\text{mag}$ v maximu své jasnosti. Určete poloměr fotosféry odpovídající každé z těchto hodnot.

Řešení: Nejprve uvažujte případ, kde $M_{\text{bol}} = -16{,}0\,\text{mag}$, což je o 20,8 mag jasnější než Slunce. Odpovídá to zářivému výkonu $L \approx 2 \cdot 10^8\,L_\odot$. Užitím vztahu $L \approx R^2 T_{\text{ef}}^4$ a porovnáním se Sluncem obdržíme $T_{\text{ef}} = 7\,000\,\text{K} \cong 1{,}2 T_{\text{ef}\odot}$, dále nalezneme $R \approx 9\,900\,R_\odot \approx 4{,}6\,\text{AU}$. Tedy supernova se vyznačuje poloměrem fotosféry, který by sahal až za poloměr dráhy Marsu. Při $M_{\text{bol}} = -19{,}0\,\text{mag}$, kdy je supernova ještě jasnější, je její poloměr $R = 180\,\text{AU}$.

Úloha 10.22 V další fázi vývoje supernov po dosažení maxima jasnosti je možným zdrojem energie rozpad ${}^{56}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{56}_{26}\text{Fe} + e^+ + \nu_e + \gamma$ s uvolňovanou energií 3,72 MeV. Poločas rozpadu ${}^{56}_{27}\text{Co}$ je $\tau_{1/2} = 77{,}7\,\text{dne}$. Určete předpokládané množství látky obsahující tento izotop, které je nezbytné k tomu, aby objasňovalo zářivé výkony supernov po několika stovkách dnů po dosažení maxima jasnosti $\cong 10^{35}\text{W}$. Údaje odpovídají supernově 1987 A.

Řešení: Nechť v čase $t = 0$ je v 1 kg kobaltu $N_0 = 1 \cdot 10^{25}$atomů, za 1 sekundu se rozpadne $N_1 = N_0\lambda = 10^{18}$atomů. Uvolněná energie při rozpadu 1 atomu je $6 \cdot 10^{-13}\text{J}$. Odhadovaný počet rozpadů za 1 sekundu je $\frac{10^{35}}{6 \cdot 10^{-13}} \cong 1{,}7 \cdot 10^{47}$, čemuž odpovídá hmotnost $\frac{1{,}7 \cdot 10^{47}}{10^{18}} \cong 1{,}7 \cdot 10^{29}\text{kg} \cong 0{,}085 M_\odot$.

Úloha 10.23 Celková energie uvolňovaná při výbuchu supernov I typu je odhadována $\cong 10^{44}\text{J}$. Určete rychlost expanze, jestliže budeme modelově předpokládat, že veškerá uvolněná energie se přemění na kinetickou energii obálky o hmotnosti $0{,}5\,M_\odot$.

Řešení: $v = \left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2} \cong 1{,}4 \cdot 10^4\text{km}$.

Úloha 10.24 Po explozi supernovy postupuje okolním prostorem rázová vlna, za jejímž čelem vznikají vysoké teploty, pro které lze při předpokladu platnosti zákona zachování energie odvodit vztah $T = \frac{3}{16}\frac{m_{\text{p}}v^2}{k}$. Určete teplotu rázové vlny, jejíž čelo postupuje rychlostí $1\,000\,\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Řešení: Dosazením obdržíme $T = 2 \cdot 10^7\,\text{K}$. Při průchodu rázové vlny vzniká mimo jiné brzdné tepelné rtg. záření, supernova se tak stává intenzivním zdrojem rtg. záření.

Úloha 10.25 Mlhovina zbylá po výbuchu supernovy se pohybuje rychlostí přibližně $v = 800\,\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$, její úhlový průměr je zhruba 3° a její vzdálenost je 800 pc. Stanovte stáří

mlhoviny, uvažujeme-li hypotézu, že výbuch byl adiabatický. Za tohoto předpokladu platí vztah $R = \frac{5}{2}vt$, kde R je vzdálenost od místa exploze supernovy.

Řešení: Lineární průměr mlhoviny $2R \cong 40\,\mathrm{pc}$, stáří je odhadováno na 10 000 roků.

Úloha 10.26 Z Cha je typem kataklyzmické proměnné zvané trpasličí nova. Skládá se z bílého trpaslíka o hmotnosti $0{,}85\,M_\odot$ a poloměru $0{,}01\,R_\odot$, druhou složkou je hvězda hlavní posloupnosti pozdní spektrální třídy M o hmotnosti $0{,}17\,M_\odot$. Oběžná doba soustavy je $T = 0{,}0745\,\mathrm{d}$. Objasněte astrofyzikální podstatu soustavy, určete maximální teplotu $T_{\max}$ a hodnotu zářivého výkonu disku při jeho akreci, jestliže $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t = 1{,}3\cdot 10^{-9} M_\odot \cdot \mathrm{rok}^{-1}$, přibližně $10^{13}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Řešení : Z III. Keplerova zákona obdržíme pro velikost velké poloosy dvojhvězdy, tedy pro vzdálenost obou složek $a = \left[\frac{1}{4\pi^2} G T^2 (M_1 + M_2)\right]^{1/3} = 5{,}2\cdot 10^8\mathrm{m}$. Vzdálenost mezi primární složkou a vnitřním Lagrangeovým bodem L_1 je dána $l_1 = a\left(0{,}500 - 0{,}227 \log \frac{M_2}{M_1}\right) = 3{,}4\cdot 10^8\mathrm{m}$. Z Cha je polodotykovým systémem, sekundární složka zaplňuje Rocheův prostor, vzdálenost mezi sekundární složkou a vnitřním Lagrangeovým bodem je zároveň velikostí druhé složky. Platí $R_2 = l_2 = a - l_1 = 1{,}8\cdot 10^8\mathrm{m}$. To zhruba souhlasí s poloměry hvězd HP spektrální třídy M6. Poloměr oběžné kruhové dráhy je $r_{\mathrm{kr}} = a\left(\frac{l_1}{a}\right)^4 \left(1 + \frac{M_2}{M_1}\right) = 1{,}2\cdot 10^8\mathrm{m}$. Odhad vnějšího poloměru disku je $R_{\mathrm{disk}} \cong 2r_{\mathrm{kr}} = 2{,}4\cdot 10^8\mathrm{m}$. Přenos hmoty je přibližně $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 1{,}3\cdot 10^{-9} M_\odot \cdot \mathrm{rok}^{-1} = 7{,}9\cdot 10^{13}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Maximální hodnota teploty disku je $T_{\max} = 0{,}488\left(\frac{3GM\mathrm{d}M/\mathrm{d}t}{8\pi\sigma R^3}\right)^{1/4} = 4{,}4\cdot 10^4\,\mathrm{K}$. Při pohybu směrem k vnějším oblastem disku teplota klesá z 44 000 K na 8 000 K. Podle Wienova posunovacího zákona to odpovídá změně $\lambda_{\max}$ z 66 nm na 363 nm. Celkový zářivý výkon disku, integrovaný přes všechny vlnové délky je

$$L_{\mathrm{disk}} = G\frac{M\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}}{2R} = 6{,}8\cdot 10^{26}\mathrm{W}.$$

Úloha 10.27 Akrece je nárůst hmoty hvězdy vyvolaný např. přitažlivostí. Jestliže padající hmota při srážce s povrchem hvězdy vyzáří svoji energii získanou v gravitačním poli, můžeme její zářivý výkon zapsat vztahem $L = G\frac{M}{R}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$, kde $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$ je rychlost akrece, množství dopadající hmoty za $1\,s$ na povrch hvězdy, M, R jsou hmotnost a poloměr hvězdy. Určete koeficient uvolňování energie, který je roven poměru uvolňované energie a klidové energie hmoty, která se účastní procesu uvolňování energie. Propočtěte tento koeficient pro
a) neutronovou hvězdu $M = 1{,}5\,M_\odot$, $R = 10\,\mathrm{km}$,
b) bílého trpaslíka $M = 1{,}4\,M_\odot$, $R = 5000\,\mathrm{km}$.
Porovnejte s efektivitou uvolňování energie v pp řetězci.

Řešení: Efektivita uvolňování energie při akreci je $\eta = \frac{1}{2}\frac{R_g}{R}\,100\%$. Konkrétně pro neutronovou hvězdu $\eta \cong 20\%$ a pro bílého trpaslíka $\eta \cong 0{,}04\%$. V případě pp řetězce je $\eta \cong 0{,}7\%$, obvykle zaokrouhlujeme $\eta \cong 1\%$.

Úloha 10.28 Porovnejte maximální teploty disku $T_{\max}$ a zářivé výkony disku při akreci u bílého trpaslíka a neutronové hvězdy. Je zadáno:
a) bílý trpaslík – $0{,}85\,M_\odot$, $0{,}0095\,R_\odot$, $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t = 10^{13}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 1{,}6\cdot 10^{-10} M_\odot\cdot\mathrm{rok}^{-1}$,
b) neutronová hvězda – $1{,}4\,M_\odot$, $R = 10\,\mathrm{km}$, $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t = 10^{14}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 1{,}6\cdot 10^{-9} M_\odot\cdot\mathrm{rok}^{-1}$.

Řešení: Pro maximální teplotu disku platí $T_{\max} = 0{,}488\left(\frac{3GM\,\mathrm{d}M/\mathrm{d}t}{8\pi\sigma R^3}\right)^{1/4}$. V prvním případě obdržíme $T_{\max} = 2{,}6\cdot 10^4\,\mathrm{K}$, což odpovídá $\lambda_{\max} = 110\,\mathrm{nm}$. Zářivý výkon disku určíme ze

vztahu $L_{\mathrm{disk}} = G\frac{M\,\mathrm{d}M/\mathrm{d}t}{2R}$, dostaneme $8{,}6\cdot10^{25}$W, tedy $0{,}22\,L_\odot$. Obdobně pro disk u neutronové hvězdy stanovíme $T_{\max} = 6{,}9\cdot10^6\,\mathrm{K}$, což odpovídá $\lambda_{\max} = 0{,}4\,\mathrm{nm}$, tudíž rtg. části spektra. Zářivý výkon disku je $9{,}3\cdot10^{29}$W, tedy $2{,}4\cdot10^3 L_\odot$.

Úloha 10.29 Planetární mlhovina s úhlovým průměrem $7'$ se nachází ve vzdálenosti $r = 150\,\mathrm{pc}$. Rychlost expanze planetární mlhoviny zjištěná spektroskopicky je $25\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Určete skutečný průměr planetární mlhoviny a její stáří za předpokladu, že expanze probíhala stále stejnou rychlostí.

Řešení: Skutečný průměr mlhoviny při $\alpha = 0{,}00204\,\mathrm{rad}$ je $D = r\alpha = 0{,}3\,\mathrm{pc}$. Stáří určíme ze vztahu $T = \frac{D}{v} = \frac{0{,}3\;3{,}08\cdot10^{16}}{2{,}5\cdot10^4} \cong 4\cdot10^{11}\mathrm{s} \cong 10^4$ roků.

Úloha 10.30 U supernovy 1987 A byl zjištěn rozdíl energií mezi první a poslední skupinou neutrin $\Delta E = 10\,\mathrm{MeV}$, časový rozdíl činil 0,3 s. Při znalosti vzdálenosti r Velkého Magellanova mračna 50 kpc stanovte horní hranici hmotnosti neutrina. Předpokládáme střední rychlost pohybu neutrin v.

Řešení: Rozdíl rychlostí mezi částicemi za předpokladu $v \cong c$ je $\Delta v = \frac{r}{t_1} - \frac{r}{t_2} \cong \frac{c^2\Delta t}{r}$. Dále platí $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cong \sqrt{\frac{2\Delta v}{c}} \cong \sqrt{\frac{2c\Delta t}{r}} \cong 3{,}5\cdot10^{-7}$, tudíž $m_\nu c^2 \cong \Delta E\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cong 3{,}5\mathrm{eV}$. Horní hranice hmotnosti je $m_\nu \cong 6\cdot10^{-36}\mathrm{kg}$.

11 Závěrečná stadia vývoje hvězd

Úloha 11.1 Odvoďte vztah pro gravitační rudý posuv u bílého trpaslíka o hmotnosti M a poloměru R.

Řešení: V přiblížení klasické fyziky platí vztahy: $E = mc^2$, $E = h\nu \Rightarrow m = \frac{h\nu}{c^2}$. Gravitační potenciální energie na povrchu hvězdy je $E_p = -G\frac{Mh\nu}{Rc^2}$. Celková energie je $E_c = h\nu\left(1 - \frac{GM}{c^2R}\right)$. Energie detekovaného fotonu na Zemi je $h\nu' = h\nu\left(1 - \frac{GM}{c^2R}\right)$, $\Delta\nu = \nu - \nu'$. Úpravou pro hmotnost hvězdy obdržíme $M = \frac{\Delta\nu}{\nu}\frac{c^2R}{G}$, nebo při využití vlnových délek $M = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\frac{c^2R}{G}$, kde jsme volili $\left|\frac{\Delta\nu}{\nu}\right| = \left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right|$. V rámci OTR lze změnu vlnové délky záření vyjádřit přibližně $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right)^{-1/2} - 1 \cong \frac{GM}{c^2R}$.

Úloha 11.2 K ověření gravitačního rudého posuvu, relativistické dilatace času uvažujme následující zadání: Mějme dvoje hodiny, první ukazují čas T_1 ve vzdálenosti R_1 od středu níže uvedených kosmických těles o hmotnosti M. Druhé hodiny ukazují čas T_2 ve vzdálenosti R_2. Pro poměr časů platí $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2R_2}}{1 - \frac{2GM}{c^2R_1}}\right)^{1/2}$. Jaký poměr obou časů ukazují hodiny v případech, jestliže:

a) Jedny hodiny jsou umístěny na povrchu bílého trpaslíka, druhé ve velké vzdálenosti.
b) Jedny hodiny jsou umístěny na povrchu neutronové hvězdy, druhé ve velké vzdálenosti.
c) Jedny hodiny jsou umístěny ve vzdálenosti Schwarzschildova poloměru u tělesa o hmotnosti $3\,M_\odot$, druhé ve velké vzdálenosti.

Řešení: Dosadíme do uvedeného vztahu: a) $T_2/T_1 = 1{,}000212$, b) $T_2/T_1 = 1{,}191828$, c) $T_2/T_1 \to \infty$.

Úloha 11.3 Odhadněte tepelnou a gravitační energii bílého trpaslíka s teplotou nitra $10^7\,$K, hmotností $1\,M_\odot$, poloměru $0{,}01\,R_\odot$, zářivém výkonu $0{,}01\,L_\odot$ a celkovým počtem částic 10^{57} ve hvězdě. Určete předpokládanou dobu existence bílého trpaslíka.

Řešení: Vyjádříme gravitační potenciální enegii $E_p = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = -2{,}3 \cdot 10^{43}$J, kinetickou energii $E_k = \frac{3}{2}NkT = 2{,}1 \cdot 10^{41}$J, tedy $|\langle E_k\rangle| < |\langle E_p\rangle|$. Hydrostatická rovnováha u bílých trpaslíků je udržována tlakem degenerovaného elektronového plynu, nikoliv tlakem plynu vyvolaným tepelným pohybem. Předpokládanou dobu existence stanovíme $T = \frac{E_k}{L} = 5{,}4 \cdot 10^{16}$s $\cong 10^9$ roků.

Úloha 11.4 Odvoďte závislost poloměru bílého trpaslíka na hmotnosti za předpokladu nerelativistické degenerace $p \sim \rho^{\frac{5}{3}}$.

Řešení: Vyjdeme z rovnice hydrostatické rovnováhy: $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{M}{r^2}\rho$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \to \frac{1}{R}$. Platí $\frac{P}{R} \sim \frac{M}{R^2}\rho$, $\rho^{\frac{2}{3}} \sim \frac{M}{R} \Rightarrow R \sim M^{-\frac{1}{3}}$. S rostoucí hmotností bílého trpaslíka se zmenšuje poloměr a hustota především v centrální, části do 1/4 poloměru se zvětšuje.

Úloha 11.5 Radiální rychlosti hvězd, jak známo, určujeme pomocí Dopplerova jevu. Skupinové určování radiálních rychlostí bílých trpaslíků ukázalo na jejich systematické vzdalování

střední rychlostí $38\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Co můžeme konstatovat o průměrné hmotnosti bílých trpaslíků, jestliže přijmeme jejich průměrný poloměr 7700 km?

Řešení: Z uvedených údajů lze odhadovat střední hmotnost bílých trpaslíků za předpokladu platnosti vztahu pro gravitační rudý posuv na $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2R}$, $M = 1{,}3\cdot10^{30}\,\mathrm{kg} = 0{,}65\,M_\odot$.

Úloha 11.6 Určete teplotu nitra bílého trpaslíka se zářivým výkonem $L = 0{,}03\,L_\odot$ o hmotnosti $M_\odot$, $X = 0$, $Y = 0{,}9$, $\mu = 1{,}4$.

Řešení: Pro teplotu nitra platí $T_i = \left[\dfrac{LZ\,(1+X)}{7{,}3\cdot10^4\mu}\dfrac{M_\odot}{M}\right]^{2/7} = 2{,}8\cdot10^7\,\mathrm{K}$

Úloha 11.7 Odhadněte hustotu, při které nastává proces neutronizace, tedy slučování elektronů a protonů na neutrony podle reakce $\mathrm{p}^+ + \mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e}$.

Řešení: V limitním případě, jestliže neutrino neodnáší energii, užijeme relativistické vyjádření kinetické energie pro elektron $m_\mathrm{e}c^2\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}-1\right] = (m_\mathrm{n}-m_\mathrm{p}-m_\mathrm{e})\,c^2$. Pro nerelativistické elektrony je rychlost $v \cong \dfrac{h}{2\pi m_\mathrm{e}}n_\mathrm{e}^{1/3} \cong \dfrac{h}{2\pi m_\mathrm{e}}\left[\left(\dfrac{Z}{A}\right)\dfrac{\rho}{m_\mathrm{H}}\right]^{1/3}$, odtud $\left(\dfrac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{n}-m_\mathrm{p}}\right)^2 \cong 1-\dfrac{h^2}{4\pi^2m_\mathrm{e}^2c^2}\left[\left(\dfrac{Z}{A}\right)\dfrac{\rho}{m_\mathrm{H}}\right]^{2/3}$. Pro hustotu obdržíme $\rho \cong \dfrac{Am_\mathrm{H}}{Z}\left(\dfrac{2\pi m_\mathrm{e}c}{h}\right)^3\left[1-\left(\dfrac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{n}-m_\mathrm{p}}\right)^2\right]^{3/2} \cong 2{,}3\cdot10^{10}\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ při předpokladu $\frac{A}{Z} = 1$ pro vodík.

Úloha 11.8 Zářivý výkon Siria B je $0{,}022\,L_\odot$, efektivní povrchová teplota dosahuje 24 800 K, naměřená hodnota gravitačního rudého posuvu je $z = 3\cdot10^{-4}$. Určete hmotnost Siria B a jeho průměrnou hustotu. Stanovte teplotu nitra a dokažte, že elektrony se nacházejí ve stavu degenerace.

Řešení: $R_B = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T_\mathrm{ef}^4}\right)^{1/2} = 5{,}6\cdot10^6\mathrm{m}$ tudíž $0{,}008\,R_\odot$. Úpravou vztahu pro gravitační rudý posuv dostaneme $M_B = \frac{c^2}{G}R_B\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2{,}1\cdot10^{30}\mathrm{kg}$, tedy $1{,}03\,M_\odot$. Průměrná hustota $\rho = 2{,}86\cdot10^9\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Teplotu nitra stanovíme ze vztahu $T_i \cong 7\cdot10^7\left(\frac{L_B}{L_\odot}\frac{M_\odot}{M_B}\right)^{2/7} = 2{,}3\cdot10^7\,\mathrm{K}$. Podmínka degenerace stanovuje $K_1\rho^{\frac{5}{3}} \geq \frac{\mathscr{R}\rho T}{\mu}$, odkud po částečném dosazení obdržíme $\rho \geq \left(\frac{T}{7{,}5\cdot10^4}\right)^{3/2}10^3$. Nerovnice dává pro $\rho \geq 5{,}4\cdot10^6\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, tudíž podmínka degenerace elektronů je splněna.

Úloha 11.9 Zářivý výkon hvězdy 40 Eri B je $0{,}017\,L_\odot$, efektivní teplota 17 000 K. Naměřená hodnota gravitačního rudého posuvu $z = 6\cdot10^{-5}$. Určete hmotnost tohoto bílého trpaslíka.

Řešení: Poloměr určíme $R_B = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T_\mathrm{ef}^4}\right)^{1/2} = 10^7\,\mathrm{m}$ tedy $0{,}015\,R_\odot$. Hmotnost $M_B = \frac{c^2}{G}R_B\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 8\cdot10^{29}\,\mathrm{kg}$, přibližně $0{,}43\,M_\odot$.

Úloha 11.10 Stanovte horní hranici poloměru pulsaru – neutronové hvězdy o hmotnosti $1{,}4\,M_\odot$, s periodou rotace $1{,}5\cdot10^{-3}\,\mathrm{s}$. Řešte v newtonovském přiblížení.

Řešení: Pro hmotný bod na rovníku rotující neutronové hvězdy musí platit $F_p > F_d$. Dosazením obdržíme $R < \left(\frac{GMP^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$, $R < 20\,\text{km}$.

Úloha 11.11 Jeden z prvních objevených bílých trpaslíků 40 Eri B má efektivní povrchovou teplotu 17 000 K a absolutní bolometrickou hvězdnou velikost 9,2 mag. Nalezněte jeho poloměr.

Řešení: Zářivý výkon stanovíme ze vztahu $L = 10^{0{,}4(4{,}75-M_{\text{bol}})} \cong 0{,}017\,L_{\odot}$. Poloměr určíme ze vztahu $R = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T_{\text{ef}}^4}\right)^{1/2} \cong 10^7\,\text{m} \cong 0{,}015\,R_{\odot}$.

Úloha 11.12 Neutronová hvězda vzniklá po výbuchu supernovy má v průběhu prvních 100 roků po vzniku povrchovou teplotu T větší než $2 \cdot 10^6\,\text{K}$. Na jaké vlnové délce leží maximum intenzity vyzařování předpokládáme-li, že vyzařuje jako černé těleso s výše uvedenou teplotou. Určete zářivý výkon, jestliže poloměr neutronové hvězdy je 10 km.

Řešení: Z Wienova posunovacího zákona určíme $\lambda_{\max} = \frac{b}{T} = 1{,}44\,\text{nm}$, zářivý výkon stanovíme ze Stefanova-Boltzmannova zákona $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4 = 1{,}14 \cdot 10^{27}\,\text{W}$.

Úloha 11.13 S využitím vztahu $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 R}$ dokažte, že maximální hodnota rudého posuvu z pro záření z povrchu neutronové hvězdy je 0,14.

Řešení: Dosadíme charakteristiky typických neutronových hvězd $M = 2{,}8 \cdot 10^{30}\,\text{kg} = 1{,}4\,M_{\odot}$, $R = 1{,}5 \cdot 10^4\,\text{m} = 15\,\text{km}$.

Úloha 11.14 Zjištěný časový rozdíl příchodu signálů z pulsaru v Krabí mlhovině PSR 0531+21 na frekvencích $f_2 = 430\,\text{MHz}$ a $f_1 = 196\,\text{MHz}$ má hodnotu 4,796 s. Určete vzdálenost pulsaru, jestliže hustota elektronů v mezihvězdném prostoru ve směru Krabí mlhoviny je $n_{\text{e}} = 2{,}8 \cdot 10^4\,\text{m}^{-3}$.

Řešení: Pulsar je zdrojem elektromagnetického záření v širokém intervalu frekvencí. Na Zemi je nejprve přijímáno záření o vyšších kmitočtech, následně teprve záření o nižších kmitočtech. Velikost tohoto časového posunu, tzv. disperzní míra, závisí na koncentraci volných elektronů v mezihvězdném prostředí ve směru pulsaru a na vzdálenosti pulsaru. Při řešení využijeme již upravený vzorec, ve kterém je časový rozdíl vyjádřen v sekundách, hustota elektronů n_{e} je dána jejich počtem v cm^3, vzdálenost d je v pc a frekvence f_1 a f_2 jsou v MHz. Platí vztah $\Delta t = 4{,}15 \cdot 10^{-3}\, n_{\text{e}} d \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2}\right)$, odkud pro vzdálenost dostaneme $d = 2000\,\text{pc}$. Tzv. disperzní míra $DM = \int_0^d n_{\text{e}} \text{d}l = 5{,}6 \cdot 10^7\,\text{pc} \cdot \text{m}^{-3}$.

Úloha 11.15 Určete hustotu elektronů v mezihvězdném prostoru ve směru pulsaru PSR 0901 − 63, jestliže na frekvencích $f_2 = 405\,\text{MHz}$ a $f_1 = 234\,\text{MHz}$ byl zjištěn časový rozdíl příchodu signálů 3,797 s. Vzdálenost pulsaru $d = 3000\,\text{pc}$.

Řešení: Ze vztahu $\Delta t = 4{,}15 \cdot 10^{-3}\, n_{\text{e}} d \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2}\right)$ určíme $n_{\text{e}} = 2{,}5 \cdot 10^4\,\text{m}^{-3}$.

Úloha 11.16 Určete energii, kterou ztrácí pulsar – neutronová hvězda o hmotnosti $1{,}4\,M_{\odot}$ a poloměru $R = 10\,\text{km}$ v Krabí mlhovině každou sekundu při zmenšování úhlové rychlosti rotace prostřednictvím změny rotační energie. Je zadáno $P = 0{,}033\,\text{s}$ a $\frac{\text{d}P}{\text{d}t} = 4 \cdot 10^{-13}$.

Řešení: $\frac{dE_{rot}}{dt} = -\frac{8}{5}\pi^2 MR^2 P^{-3}\frac{dP}{dt} = 5 \cdot 10^{31}$ W což odpovídá zářivému výkonu Krabí mlhoviny. Lze také vyjádřit změnu rotační kinetické energie za sekundu, tedy $\Delta E_{rot} = \frac{4\pi^2 MR^2}{5P^2} - \frac{4\pi^2 MR^2}{5(P+\Delta P)^2} = \frac{4}{5}\pi^2 MR^2 \left[\left(\frac{1}{P^2}\right) - \left(\frac{1}{P^2} - \frac{2\Delta P}{P^3}\right)\right] = 10^{32}$ J. Samotná Krabí mlhovina má zářivý výkon asi $5 \cdot 10^{31}$ W.

Úloha 11.17 Pulsar v Krabí mlhovině má zářivý výkon $5 \cdot 10^{31}$ W, jeho perioda rotace $P = 0{,}033$ s, hmotnost $1{,}4\, M_\odot$, $R = 10$ km. Určete nárůst periody rotace a odhadněte stáří pulsaru.

Řešení: Rotační kinetická energie je dána vztahem $E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$, $I = \frac{2}{5}MR^2$. Předpokládejme, že veškerá energie se přeměňuje na záření, platí zákon zachování energie: $\frac{dE_{zar}}{dt} + \frac{dE_{rot}}{dt} = 0$. Dále platí $L = \frac{dE_{zar}}{dt} = -\frac{dE_{rot}}{dt} = \frac{8}{5}\pi^2 MR^2 P^{-3}\frac{dP}{dt}$. Odtud dostaneme $\frac{dP}{dt} = \frac{5}{8\pi^2}\frac{LP^3}{MR^2}$, po dosazení obdržíme pro nárůst periody rotace $\frac{dP}{dt} = 4 \cdot 10^{-13}$. Přibližný odhad stáří pulsaru dává $t \cong \frac{0{,}033}{4 \cdot 10^{-13}} \cong 10^{11} \cong 3 \cdot 10^3$ roků. Ve skutečnosti je stáří pulsaru asi 10^3 roků.

Úloha 11.18 Určete velikost magnetické indukce magnetického pole pulsaru v Krabí mlhovině. Perioda rotace $P = 0{,}033$ s, časová změna $dP/dt = 4 \cdot 10^{-13}$, $\theta = 90°$.

Řešení: Zářivý výkon rotujícího magnetického dipólu je $L = -\dfrac{64\pi^5 B^2 R^6 \sin^2\theta}{6c^3 P^4 \mu_0}$. Předpokládáme, že $\frac{dE_{rot}}{dt} = -\frac{8}{5}\pi^2 MR^2 P^{-3}\frac{dP}{dt}$. Za předpokladu, že rotační kinetická energie se plně přeměňuje na záření platí $-\frac{8}{5}\pi^2 MR^2 P^{-3}\frac{dP}{dt} = -4\pi^2 IP^{-3}\frac{dP}{dt} = \frac{64\pi^5 B^2 R^6 \sin^2\theta}{6c^3 P^4 \mu_0}$. Pro hodnotu magnetické indukce dostáváme $B = \frac{1}{R^3 \sin\theta}\left(\frac{3c^2}{8\pi^3} IP\frac{dP}{dt}\right)^{1/2}$. Dosazením obdržíme hodnotu $B \cong 8 \cdot 10^8$ T, což je řádově srovnatelné s hodnotou zjištěnou z pozorování $B = 4 \cdot 10^8$ T.

Úloha 11.19 Stanovte charakteristickou energii relativistických elektronů v Krabí mlhovině vyvolávajících v optickém oboru záření o vlnové délce $\lambda = 600$ nm. Velikost magnetické indukce je $1 \cdot 10^{-8}$ T. Střední energie vyzářených fotonů synchrotronovým mechanismem je $\epsilon = 2{,}0 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{T^{-1} \cdot eV}$.

Řešení: $\epsilon = h\frac{c}{\lambda} = 2$ eV, $E_e^2 = \frac{\epsilon}{B} \Rightarrow E_e = 10^{12}$ eV.

Úloha 11.20 Pulsar o zářivém výkonu $7{,}8 \cdot 10^{29}$ W, hmotnosti $1{,}4\, M_\odot$ a poloměru $R = 10$ km má periodu rotace $P = 0{,}089$ s. Určete nárůst periody rotace a jeho přibližné stáří.

Řešení: Postup obdobný jako v předcházejících úlohách, $dP/dt = 1{,}2 \cdot 10^{-13}$, $t \cong 5 \cdot 10^4$ roků.

Úloha 11.21 Zdroje rtg. záření v Galaxii se vyznačují zářivými výkony v intervalu $(10^{26} - 10^{31})$ W . Odhadněte lineární velikost zdrojů, jestliže vlnová délka maximální intenzity ve spojitém spektru je $\lambda_m = 0{,}3$ nm, tudíž teplota dosahuje asi 10^7 K. Jakou akreční rychlostí musí hmota padat na objekt, aby produkovala pozorovaný zářivý výkon?

Řešení: Pro náš výpočet zvolme zářivý výkon 10^{30} W. Poloměr vypočteme ze vztahu $R = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T^4}\right)^{1/2}$. Numerická velikost akrečního disku kolem černé díry $2R \cong 20$ km. Nechť na objekt o poloměru R a hmotnosti M dopadá hmota tempem dM/dt za s. Produkovaná gravitační potenciální energie je $\frac{dE_{grav}}{dt} = G\frac{M}{R}\frac{dM}{dt}$. Jestliže energie se přeměňuje na záření se 100% účinností, dostaneme ze vztahu $L = G\frac{M}{R}\frac{dM}{dt}$, $\frac{dM}{dt} = \frac{RL}{GM} = 7{,}5 \cdot 10^{13}\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$. Reálnější

předpoklad účinnosti je asi 50%.

Úloha 11.22 Určete velikost energie, kterou Krabí mlhovina vyzařuje a částečně spotřebuje na svoji expanzi, víte-li, že ztrátu E_{rot} v důsledku zbržďování rotující neutronové hvězdy způsobené interakcí magnetického pole s plazmatickou obálkou můžeme vyjádřit vztahem $\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{rot}}}{\mathrm{d}t} = I\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$. Fyzikální charakteristiky neutronové hvězdy jsou $1{,}4\,M_{\odot}$, $R = 10\,\mathrm{km}$, $\omega = 190{,}3\,\mathrm{s}^{-1}$, $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -2{,}4 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}^{-2}$.

Řešení: Po dosazení hodnot obdržíme $\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{rot}}}{\mathrm{d}t} \cong -5 \cdot 10^{31}\,\mathrm{W}$.

Úloha 11.23 Rtg. pulsary ve dvojhvězdách představují neutronové hvězdy, na které dopadá hmota. K takovým objektům patří rtg. pulsar Her X 1 s periodou $P = 1{,}24\,\mathrm{s}$, jehož zářivý výkon je $L \cong 8 \cdot 10^{30}\,\mathrm{W}$. Odhadněte rychlost akrece u tohoto pulsaru v $M_{\odot} \cdot \mathrm{rok}^{-1}$. Údaje pro $R = 1{,}5 \cdot 10^{4}\,\mathrm{m}$, $M = 3 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$.

Řešení: Akreční zářivý výkon je dán vztahem $L \cong G\frac{M}{R}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$, odtud určíme $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{RL}{GM} = 6 \cdot 10^{14}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cong 10^{-8}\,M_{\odot} \cdot \mathrm{rok}^{-1}$.

Úloha 11.24 Rtg. pulsar má periodu $P = 3{,}61\,\mathrm{s}$ a zářivý výkon $L_x = 3{,}8 \cdot 10^{29}\,\mathrm{W}$. Předpokládejme, že jde o neutronovou hvězdu o hmotnosti $1{,}4\,M_{\odot}$ a poloměru 10 km, s magnetickou indukcí na povrchu 10^{8} T. Nalezněte $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ a hodnotu $\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$. Můžeme rtg. pulsar vysvětlit jako rádiový?

Řešení: Ze vztahu $L = -\frac{8}{5}\pi^2 MR^2P^{-3}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ určíme $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -\frac{5L}{8\pi^2}M^{-1}R^{-2}P^{3} = 4 \cdot 10^{-9}$. Odtud $\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 1 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}^{-1}$. Pulsar by se rychle zastavil.

Úloha 11.25 Porovnejte velikost maximálního úhlového momentu hybnosti černé díry o hmotnosti $1{,}4\,M_{\odot}$ s velikostí úhlového momentu hybnosti následně uvedeného pulsaru. Z dosud nám známých pulsarů je nejrychleji rotujícím pulsar s periodou $P = 0{,}00156\,\mathrm{s}$, hmotností $1{,}4\,M_{\odot}$ a poloměrem 10 km.

Řešení: Pro černou díru je velikost úhlového momentu hybnosti $L_{\max} = \frac{GM^2}{c} = 1{,}7 \cdot 10^{42}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, pro pulsar $L = m\omega r^2 = 1{,}1 \cdot 10^{42}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. Úhlové momenty hybnosti jsou u obou těles srovnatelné.

12 Hvězdy a mezihvězdná látka

Úloha 12.1 V typickém mezihvězdném mračně při $T = 50\,\mathrm{K}$ je $n = 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^{-3}$. Budeme předpokládat, že mračno je složeno z vodíku H I, $\rho_0 = m_\mathrm{H} n_\mathrm{H} = 8{,}4 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$. Určete kritickou Jeansovu hmotnost.

Řešení: Zvolíme molekulární hmotnost $\mu = 1$ a dosadíme do vztahu $M_J \cong \left(\frac{5kT}{G\mu m_\mathrm{H}}\right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho_0}\right)^{1/2}$. Po dosazení obdržíme $M_J \cong 1500\,M_\odot$.

Úloha 12.2 Stanovte teoretickou hodnotu Jeansovy hmotnosti mezihvězdných mračen, pro tři možné případy:
a) chladné oblasti s $T = 10^2\,\mathrm{K}$, $\rho_0 = 10^{-19}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$
b) oblasti H II, kde $T = 10^4\,\mathrm{K}$, $\rho_0 = 10^{-21}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$
c) horké oblasti, ve kterých $T = 10^6\,\mathrm{K}$, $\rho_0 = 10^{-23}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$
Molekulární hmotnost μ přijměte rovnu 1 v případě a), v dalších případech pokládáme $\mu = \frac{1}{2}$.

Řešení: $M_J \cong 1{,}2 \cdot 10^4\,M_\odot$, $M_J \cong 3{,}4 \cdot 10^8\,M_\odot$, $M_J \cong 3{,}4 \cdot 10^{12}\,M_\odot$

Úloha 12.3 Určete dobu smršťování mračna volným pádem, jestliže průměrná hustota mračna je $\rho = 3 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$

Řešení: Dosadíme do vztahu pro dobu volného pádu $t = \sqrt{\frac{3\pi}{32}\frac{1}{G\rho}} = 0{,}4 \cdot 10^{13}\,\mathrm{s} = 1{,}3 \cdot 10^5$ roků.

Úloha 12.4 Stanovte střední zářivý výkon protohvězdy v průběhu počátečního smršťování, které probíhalo na časové škále $3{\cdot}10^5$ roků $= 10^{13}$ s. Smršťující se mračno o hmotnosti $1{,}5\,M_\odot = 3{\cdot}10^{30}\,\mathrm{kg}$ se vyznačovalo původní velikostí mračna $\approx 10^{11}\,\mathrm{m}$, po proběhlé gravitační kontrakci mělo jádro mračna velikost $R = 1{,}6{\cdot}10^{11}\,\mathrm{m}$. Předpokládáme, že smršťování probíhalo relativně pomalu „kvazirovnovážně", platila pro něj viriálová věta $\langle E_\mathrm{k}\rangle + 2\langle E_\mathrm{p}\rangle = 0$.

Řešení: Při smršťování je polovina uvolněné gravitační potenciální energie vyzářena – $-\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}$. Velikost vyzářené energie určíme ze vztahu vyjádřeném v absolutních hodnotách $|E_\mathrm{vyz}| = \left|\frac{1}{2}E_\mathrm{p}\right| = \left|\frac{GM^2}{2R}\right| = 1{,}9 \cdot 10^{39}\,\mathrm{J}$. Střední hodnota zářivého výkonu protohvězdy je $\langle L\rangle = E_\mathrm{vyz}/t = 1{,}9 \cdot 10^{27}\,\mathrm{W} = 5\,L_\odot$.

Úloha 12.5 Určete střední dobu mezi dvěma srážkami atomů neionizovaného vodíku při teplotě mezihvězdného mračna 80 K, jestliže účinný srážkový průřez atomů je přibližně $\sigma \cong 10^{-19}\,\mathrm{m}^2$, předpokládaná hustota atomů je $n_\mathrm{H} \cong 10^{-6}\,\mathrm{m}^{-3}$.

Řešení: Pro střední dobu platí $\tau \cong \frac{1}{\sigma n_\mathrm{H}}\left(\frac{2kT}{3m_\mathrm{H}}\right)^{-1/2} \cong 1{,}5 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s} \cong 500$ roků.

Úloha 12.6 V mezihvězdném prostředí, jehož vlastnosti se blíží vlastnostem ideálního jednoatomového plynu, je teplota určována pomocí vztahu $\frac{3}{2}kT = \frac{9}{32}m_\mathrm{H}v^2$. Určete teplotu je-li rychlost rozšiřování vláknových struktur mlhoviny rovna $v \cong 10^2\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Řešení: Dosazením obdržíme $T = 230\,000\,\mathrm{K}$.

Úloha 12.7 Určete dobu pobytu atomu vodíku v ionizovaném stavu v planetární mlhovině, je-li zadána koncentrace volných elektronů $n_\mathrm{e} = 10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}$, teplota mlhoviny $T = 10^4\,\mathrm{K}$.

Řešení: Doba pobytu je $t_p \cong \frac{2{,}5\cdot 10^{18}}{n_\mathrm{e}}\sqrt{\frac{T}{10^4}} \cong 2{,}5\cdot 10^8\,\mathrm{s} \cong 8$ roků při uvedených podmínkách.

Úloha 12.8 Uvažujte atomu vodíku nacházející se v mezihvězdném mračně. Teplota mračna určuje rychlost pohybu atomů $v_\mathrm{t} = \sqrt{2kT/m_\mathrm{H}}$, úniková rychlost atomů na okraji mračna je dána vztahem $v_\mathrm{u} = \sqrt{2GM/R}$. Zdůvodněte výpočtem, proč emisní mlhoviny drží pohromadě.

Řešení: Dosadíme do uvedených vztahů a vytvoříme tabulku. Tepelná rychlost atomů vodíku je o řád vyšší, než úniková rychlost atomů na okraji mračna, které drží pohromadě vlastní expanzí nikoliv gravitací.

Mlhovina	Průměr [pc]	Hmotnost [$M_\odot$]	v_u [$\mathrm{km\cdot s^{-1}}$]	T [K]	v_t [$\mathrm{km\cdot s^{-1}}$]
M 8	14	2 600	1,8	7 500	11,1
M 17	7	500	1,1	8 700	12,0

Úloha 12.9 Jak se mění poloha hvězdy na diagramu barva – pozorovaná hvězdná velikost pro kulové hvězdokupy, jestliže
a) vzdálenost hvězdokupy se zvětší 10×
b) mezi hvězdokupou a pozorovatelem leží mračno prachu pro které $A = 5\,\mathrm{mag}$.

Řešení: Vyjdeme ze vztahu $m - M = 5\log r - 5$. Při zvětšení vzdálenosti 10× se zvětší pozorovaná hvězdná velikost o 5 mag, tedy poloha hvězdy se posune směrem dolů. V případě mezihvězdného mračna prachu se zvětší pozorovaná hvězdná velikost rovněž o 5 mag, tudíž poloha hvězdy se posune dolů na H – R diagramu.

Úloha 12.10 Odhadněte teplotu prachové částice nacházející se ve vzdálenosti $r_v = 100\,\mathrm{AU}$ od nově vzniklé hvězdy hlavní posloupnosti spektrální třídy F0. Předpokládejme, že rotující částice je ve stavu termodynamické rovnováhy, to znamená, že množství energie absorbované částicí v daném časovém intervalu je přesně rovno množství vyzářené energie touto částicí. Dále předpokládáme, že částice je sféricky symetrická a absorbuje záření jako černé těleso. Uvažovaná hvězda hlavní posloupnosti má povrchovou teplotu 8 200 K a poloměr 1,8 $R_\odot$.

Řešení: Dosazením do Stefanova–Boltzmannova zákona určíme zářivý výkon hvězdy $L = 5{,}1\cdot 10^{34}\,\mathrm{W}$. Za podmínek zadání přibližně platí $\frac{L}{4\pi r_v^2}\frac{4}{3}\pi r_c^3 = \frac{4}{3}\pi r_c^3\sigma T_\mathrm{cef}^4$, odkud $T_\mathrm{cef} = \left(\frac{L}{4\pi r_v^2}\frac{1}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{R_h^2}{r_v^2}T_\mathrm{hef}^4\right)^{1/4} \cong 75\,\mathrm{K}$.

Úloha 12.11 Ve středu planetární mlhoviny Helix se nachází horká hvězda – bílý trpaslík s povrchovou teplotou $T = 100\,000\,\mathrm{K}$. Velká část záření centrální hvězdy je pohlcována mlhovinou. Objasněte proč můžeme skrze ni pozorovat vzdálenější galaxie.

Řešení: Při tak vysoké povrchové teplotě hvězdy připadá velká část záření na lymanovské kontinuum $\lambda < 91{,}2\,\mathrm{nm}$, které je absorbováno mlhovinou a ionizuje přitom vodík. Ve

viditelném oboru spektra je mlhovina průzračná pro záření jak centrální hvězdy tak i objektů umístěných v radiálním směru za ní.

Úloha 12.12 Odvoďte vztah pro geometrickou délku zorného paprsku uvnitř prstencové mlhoviny, skládající se z obálky o tloušťce d a vnějším poloměru r. Bude mlhovina vypadat jako planetární, jestliže hustota uvnitř obálky se zmenší o jeden řád a $d/r = 0{,}1$?

Řešení: Geometrická délka zorného paprsku je $l = 2\left\{\left[r^2 - x^2\right]^{1/2} - \left[(r-d)^2 - x^2\right]^{1/2}\right\}$, kde x je vzdálenost záměrného paprsku do středu mlhoviny. Při zadaných podmínkách bude mlhovina vypadat jako planetární.

Úloha 12.13 Uprostřed emisní mlhoviny Růžice se nachází hvězda spektrální třídy O5 s povrchovou teplotou asi 50 000 K a odhadovaným poloměrem 18 $R_\odot$. Kolik mezihvězdných atomů vodíku dokáže tato hvězda ionizovat za 1 sekundu? Jak by se změnil počet fotonů, jestliže by se teplota hvězdy zvýšila na 100 000 K?

Řešení: Při zadané povrchové teplotě a poloměru je zářivý výkon hvězdy $L = 5{,}6\cdot 10^{32}$ W, tedy $1{,}5\cdot 10^6\,L_\odot$. Z Wienova posunovacího zákona obdržíme $\lambda_m = \frac{0{,}29}{50000} = 58\,\text{nm}$, což je podstatně méně než 91,2 nm nezbytných pro ionizaci vodíku za základního stavu. Většina fotonů je schopna vyvolat ionizaci, pro zjednodušení předpokládejme, že všechny emitované fotony mají λ_m stejné. Jejich střední energie je $E = \frac{hc}{\lambda} = 3{,}4\cdot 10^{-18}$ J. Celkový počet fotonů je $N_f \cong \frac{L}{E} \cong 10^{50}$. Počet fotonů vyzařovaných z 1 m^2 za 1 sekundu lze vyjádřit $\frac{\sigma T^4}{2{,}7\,kT} = \frac{\sigma}{2{,}7\,k}T^3$. Při zadaných povrchových teplotách téměř každý foton může ionizovat atom, tedy počet ionizací je roven počtu fotonů vyzařovaných za 1 sekundu. Celkový počet fotonů vyzařovaných hvězdou je $\frac{\sigma}{2{,}7\,k}T^3\,4\pi R^2 \cong 10^{50}$, což odpovídá výsledkům získávaným jinými způsoby. Jestliže dojde ke zvýšení teploty na 100 000 K, tedy na dvojnásobek, počet fotonů se zvýší osminásobně.

Úloha 12.14 Doložte výpočtem vznik oblasti H II ionizujícím zářením v prostoru kolem hvězdy spektrální třídy O6, $T_\text{ef} \cong 45\,000$ K, $L \cong 1{,}3\cdot 10^5\,L_\odot$.

Řešení: Podle Wienova posunovacího zákona $\lambda_\text{max} = 64$ nm, tedy existují podmínky pro ionizaci vodíku ze základního stavu. Nezbytná energii je rovna $E = \frac{hc}{\lambda} = 3{,}1\cdot 10^{-18}$ J. Při zjednodušujících předpokladech, že všechny emitované fotony mají stejnou vlnovou délku, je celkový počet fotonů produkovaných hvězdou za sekundu $N_f \cong \frac{L}{E} \cong 1{,}6\cdot 10^{49}$. Při znalosti rekombinačního koeficientu $\alpha = 3{,}1\cdot 10^{-19}\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ a hodnotě hustoty mračna vodíku $n_\text{H} \cong 5\cdot 10^9\,\text{m}^{-3}$ dostaneme dosazením pro poloměr Strömgrenovy oblasti $r_S \cong \left(\frac{3N_f}{4\pi\alpha}\right)^{1/3} n_\text{H}^{-2/3} \cong 7{,}9\cdot 10^{15}\,\text{m} \cong 0{,}25$ pc.

Úloha 12.15 Které jsou dva hlavní faktory určující velikost oblasti H II? Objasněte astrofyzikální podstatu své odpovědi, odvoďte velikost Strömgrenovy sféry.

Řešení: Velikost H II oblasti je určována poloměrem a teplotou ionizující hvězdy a hustotou látky v Strömgrenově oblasti. Platí vztah $r_S \cong \left(\frac{3N_f}{4\pi\alpha}\right)^{1/3} n_\text{H}^{-2/3}$.

Úloha 12.16 Dokažte, že Strömgrenův poloměr zóny H II závisí na koncentraci atomů vodíku v závislosti $r_S \sim n^{-2/3}$.

Řešení: Základní složkou mezihvězdné látky je vodík, který je v oblastech H II prakticky plně ionizován. V stacionárním stavu počet ionizací je roven počtu rekombinací, které probíhají při srážkách protonů a elektronů. Jejich počet v objemové jednotce je proto $\sim n_e n_p$ nebo n^2, $n = n_p + n_e$. Celkový počet rekombinací v oblasti H II je $\sim n^2 r_S^3 =$ konst$\cdot$, kde r_S je poloměr oblasti H II. Z druhé strany počet rekombinací je roven počtu ionizací, které jsou určeny parametry vyzařující hvězdy. Shrnuto z výše uvedeného platí $r_S \sim n^{-2/3}$.

Pro číselnou představu uvádíme tabulku poloměrů oblastí vodíku H II u hvězd hlavní posloupnosti různých spektrálních tříd při $n_H = 10^6\,\mathrm{m}^{-3}$.

Spektrální třída	r [pc]	Spektrální třída	r [pc]
O5	140	B1	17
O6	110	B2	11
O7	87	B3	7,2
O8	66	B4	5,2
O9	46	B5	3,7
B0	26	A0	0,5

Úloha 12.17 Nalezněte poloměr Strömgrenovy oblasti kolem hvězdy Spicy, B2V, $T = 24\,000\,\mathrm{K}$, $R = 5\,R_\odot$. Předpokládaná hustota $n_H = 10^6\,\mathrm{m}^{-3}$, koeficient rekombinace na všechny energetické hladiny vyjma první základní je $\alpha = 2{,}3 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Řešení: Nejprve určíme počet kvant záření – fotonů uvolňovaných z $1\,\mathrm{m}^2$ povrchu hvězdy za 1 s, $N = \frac{2\pi kT}{hc^2}\nu^2 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$, kde $\nu = \frac{c}{\lambda} = 3{,}29 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$. Dosazením obdržíme počet kvant lymanovského kontinua $N \cong 10^{26}$ fotonů.m^2·s^{-1}. Při poloměru hvězdy $R = 3{,}5 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$ dostaneme celkový počet fotonů uvolňovaných hvězdou $N_f = 4\pi R^2 N \cong 10^{46}$ fotonů.s^{-1}. Poloměr Strömgrenovy oblasti určíme $r_S \cong \left(\frac{3N_f}{4\pi\alpha}\right)^{1/3} n_H^{-2/3} \cong 2{,}2 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m} \cong 7\,\mathrm{pc}$.

Úloha 12.18 Hvězda s povrchovou teplotou 16 000 K je pohroužena do mezihvězdného mračna. Odhadněte, jaká část její vyzařované energie připadá na ionizaci mezihvězdného vodíku. Předpokládejme, že hvězda vyzařuje jako černé těleso.

Řešení: Ionizovat vodík je schopné záření s vlnovou délkou $\lambda < 91{,}2\,\mathrm{nm}$, tedy s frekvencí $\nu > \nu_1$, kde $\nu_1 = 3 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$. Hledaná část energie záření je $\delta = \left(\int_{\nu_1}^\infty B_\nu \mathrm{d}\nu\right)\left(\int_0^\infty B_\nu \mathrm{d}\nu\right)^{-1}$, kde $B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]^{-1} \cong \frac{2h\nu^3}{c^2}\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$. Pro vodík $x_1 = \frac{h\nu_1}{kT} \cong \frac{160000}{T}$, při $T = 16\,000\,\mathrm{K}$ $x_1 = 10$, tudíž $\delta = \left(\int_{10}^\infty x^3 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty x^3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)^{-1}$. Při $x \gg 1$ platí $\int_{10}^\infty x^3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \cong 10^3\int_{10}^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 10^3\mathrm{e}^{-10}$. Dále $\int_0^\infty x^3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 3! = 6$. Celkově $\delta \cong \frac{1}{6}10^3\mathrm{e}^{-10} \cong 10^{-2}$ připadá na ionizaci vodíku, hvězda má příliš nízkou teplotu pro výraznější ionizaci.

Úloha 12.19 Boltzmannův člen $\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$ umožňuje určení relativního obsazení energetických hladin. Užijte tento člen k výpočtu teploty nezbytné pro atomy vodíku, aby proton a elektrony přešly z antiparalelního do paralelního spinu. Jsou teploty mračen H I dostatečné k produkování této nízké energie?

Řešení: Stupeň excitace atomů vyjadřujeme z Boltzmannovy rovnice $\frac{N_B}{N_A} = \frac{g_B}{g_A}\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$, kde $\frac{g_B}{g_A} = 3$, při $\nu = 1420{,}4\,\mathrm{MHz} \Rightarrow \frac{h\nu}{k} = 0{,}07\,\mathrm{K}$. Boltzmannova rovnice má tvar $\frac{N_B}{N_A} = 3\exp\left(-\frac{0{,}07}{T}\right)$. Kinetická teplota mezihvězdného vodíku je vždy větší než 0,07 K, tedy

$\exp\left(-\frac{0{,}07}{T}\right) \cong 1$, poměr $\frac{N_B}{N_A} = 3$ se nepatrně mění s teplotou mezihvězdného plynu. Ve vyšším stavu s antiparalelním spinem (přesněji v důsledku rozdílnosti orientací magnetických momentů protonu a elektronu) se bude nacházet 75% atomů vodíku.

Úloha 12.20 Emisní čára HI je pozorována na kmitočtu $\nu = 1\,420{,}4057\,\mathrm{MHz}$. Určete poměr obsazení horních a dolních energetických hladin při teplotách $T = 100\,\mathrm{K}$, $T = 10\,\mathrm{K}$.

Řešení: Dosadíme do vztahu $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\exp\left(-\frac{E_{\mathrm{F1}}}{kT}\right)}{\exp\left(-\frac{E_{\mathrm{F2}}}{kT}\right)} = \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$ pro $T = 100\,\mathrm{K}$ a $T = 10\,\mathrm{K}$. Obdržíme $N_1/N_0 = 0{,}9993$ při $T = 100\,\mathrm{K}$, $N_1/N_0 = 0{,}9932$ při $T = 10\,\mathrm{K}$.

Úloha 12.21 U planetární mlhoviny byl spektroskopicky zjištěn Balmerův dekrement, poměr intenzit spektrálních čar H_α a H_β rovný 3,50. Teoreticky propočítaná hodnota tohoto poměru je 2,86. Rozdíl velikostí intenzit spektrálních čar na různých vlnových délkách je způsoben zčervenáním v mezihvězdném prostředí, které je větší v krátkovlnné než v dlouhovlnné (červené) oblasti optického spektra. Jev je vyvolán prachovými částicemi, hovoříme o zčervenání. Určete vzdálenost planetární mlhoviny, jestliže závislost mezihvězdné absorpce na vzdálenosti je v Galaxii dána empirickým vztahem $A_\lambda = \frac{6{,}5\,\mathrm{Å}}{\lambda} \cdot 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{mag\,pc^{-1}}$.

Řešení: Podle uvedeného vztahu spektrální čáry H_α, H_β budou zeslabeny v mezihvězdném prostředí absorpcí závislou na vlnové délce, tedy rozdílně pro obě čáry. Proto poměr naměřených zářivých toků v uvedených čarách je odlišný od teoretické hodnoty, závisí na vzdálenosti. Hodnoty absorpce A_λ v magnitudách a zeslabení v čarách H_α a H_β jsou: $\lambda_{\mathrm{H}\alpha} = 656{,}3\,\mathrm{nm} \Rightarrow A_{\mathrm{H}\alpha} r = 0{,}79 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mag\,pc^{-1}} \cdot r \Rightarrow$ zeslabení $10^{-0{,}00032r}$, $\lambda_{\mathrm{H}\beta} = 486{,}1\,\mathrm{nm} \Rightarrow A_{\mathrm{H}\beta} r = 1{,}14 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mag\,pc^{-1}} \cdot r \Rightarrow$ zeslabení $10^{-0{,}00046r}$. Pro pozorovaný a teoretický poměr intenzit spektrálních čar H_α a H_β platí: $\left(\frac{F_{\mathrm{H}\alpha}}{F_{\mathrm{H}\beta}}\right)_{\mathrm{poz}} = \frac{F_{\mathrm{H}\alpha} \cdot 10^{-0{,}00032r}}{F_{\mathrm{H}\beta} \cdot 10^{-0{,}00046r}} = \left(\frac{F_{\mathrm{H}\alpha}}{F_{\mathrm{H}\beta}}\right) \cdot 10^{0{,}00014r}$. Obdržíme vztah mezi pozorovaným a teoretickým Balmerovým dekrementem a vzdáleností. Dosazením číselných hodnot obdržíme $3{,}5 = 2{,}86 \cdot 10^{-0{,}00014r} \Rightarrow 0{,}00014r = \log(3{,}5/2{,}86) \Rightarrow r = 626\,\mathrm{pc}$.

Úloha 12.22 Ze spektroskopických pozorování planetární mlhoviny NGC 7027 v souhvězdí Labutě byla zjištěna její teplota $1{,}1 \cdot 10^4\,\mathrm{K}$. Vyzařovací schopnost plynu mlhoviny, jak ve spektrálních čarách tak ve spojitém spektru, charakterizujeme veličinou nazývanou emisní míra, je zavedena obecně $EM = \int_0^l n_{\mathrm{e}}^2 \mathrm{d}l$. V celém rozsahu vlnových délek je povrchová jasnost mlhoviny prakticky úměrná EM. V naší úloze je střední emisní míra $EM = 5{,}4 \cdot 10^{19}\,\mathrm{pc \cdot m^{-6}}$. Nalezněte koncentraci elektronů n_{e} v mlhovině a stanovte její hmotnost. Předpokládáme $n_{\mathrm{e}} =$ =konst. a sférický tvar mlhoviny o průměru $D \cong 0{,}1\,\mathrm{pc}$

Řešení: Ze zadání úlohy dostaneme $EM = n_{\mathrm{e}}^2 D \Rightarrow n_{\mathrm{e}} = 2{,}3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m^{-3}}$. Hmotnost elektronů v mlhovině odhadneme $M \cong \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 n_{\mathrm{e}} m_{\mathrm{e}} \cong 10^{25}\,\mathrm{kg}$. Tento odhad se zvýší na $M \cong 10^{29}\,\mathrm{kg}$ při započtení hmotnosti protonů a dále atomů helia, kterých je v mlhovině přibližně 16% počtu atomů vodíku a započtením hmotnosti i těžších prvků.

Úloha 12.23 Mezihvězdný vodíkový plyn má teplotu 100 K .Určete šířku spektrální čáry za předpokladu pouze teplotního rozšíření. Dále stanovte šířku čáry v případě rozšíření srážkami, při hustotě $n = 10^6\,\mathrm{m^{-3}}$ a $\sigma = 3{,}6 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{m^2}$.

Řešení: $\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$, $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c}\frac{n\sigma}{\pi}\sqrt{\frac{2kT}{m}} = 2{,}2 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{m}$. Rozšíření srážkami je vzhledem k nízké teplotě a malé hustotě velmi malé.

Úloha 12.24 Zjištěné šířky čar H_α s $\lambda = 656{,}3\,\mathrm{nm}$ a N II s $\lambda = 658{,}4\,\mathrm{nm}$ jsou $\Delta\lambda_1 = 0{,}05\,\mathrm{nm}$ a $\Delta\lambda_2 = 0{,}04\,\mathrm{nm}$. Nalezněte teplotu a rychlost pohybu oblastí plynu v mlhovině.

Řešení: Využijeme vztah $\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c}\left(\frac{2kT}{m} + v_\mathrm{t}^2\right)^{1/2}$ pro šířky obou čar, řešíme dvě rovnice, obdržíme kinetickou teplotu $T \cong 3\,100\,\mathrm{K}$ a $v_\mathrm{t} \cong 9\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Úloha 12.25 Ve spektrech plynných mlhovin pozorujeme pozorujeme rádiové čáry vznikající přechody mezi vysoce položenými energetickými hladinami. Určete vlnovou délku rekombinační čáry vodíku $\mathrm{H}n_\alpha$, $n \gg 1$.

Řešení: Vlnová délka fotonu vyzařovaného při přechodu z energetické hladiny m na n je dána vztahem $\lambda_{nm} = \lambda_1 \frac{n^2 m^2}{m^2 - n^2}$, kde $\lambda_1 = 91{,}2\,\mathrm{nm}$. Položíme $m = n + 1$ a předpokládáme, že $n \gg 1$. Dosazením obdržíme $\lambda_{n,n+1} = \lambda_1\left(\frac{n^3}{2} + n^2\right)$. Podle tohoto vztahu spektrální čára $\mathrm{H}\,100_\alpha$ má vlnovou délku přibližně 5 cm.

Úloha 12.26 Dokažte, že rekombinační čáry vodíku n_α, n_β, n_γ, n_δ jsou ekvidistantní podle frekvence.

Řešení: Řešení: Vyjdeme ze vztahu pro frekvenci fotonu vyzařovaného při přechodu atomu vodíku z energetické hladiny m na n $\nu_{nm} = \nu_1\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$, kde $\nu_1 = 3{,}29 \cdot 10^{15}\,\mathrm{Hz}$. Položíme $m = n + \Delta n$ a předpokládáme, že $n \gg 1$ a $\Delta n \ll 1$. Obdržíme $\nu_{n,n+\Delta n} = \nu_1\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+\Delta n)^2}\right) \cong \frac{2\nu_1}{n^3}\Delta n$. Odtud je zřejmé, že při zvětšení Δn o jednotku narůstá frekvence odpovídajícího přechodu o stejnou velikost $\frac{2\nu_1}{n^3}$, která je frekvencí čáry $\mathrm{H}n_\alpha$.

Úloha 12.27 Nechť mračno mezihvězdného plynu má hmotnost M a jeho úhlový poloměr je φ. Dokažte, že pro vzdálenost mračna platí $r \sim \frac{M^{2/5}}{\varphi F^{1/5}}$, kde F je tok záření z mračna detekovaný na Zemi. Tento vztah odvodil Šklovskij pro určení vzdálenosti mlhovin za předpokladu, že pro jejich hmotnost platí $M \sim \sqrt{LV}$.

Řešení: Pro objem mlhoviny platí $V \sim R^3 \sim r^3\varphi^3$, pro zářivý výkon platí $L \sim R^2 \sim r^2\varphi^2 F$. Úpravou dostaneme $r \sim \frac{M^{2/5}}{\varphi F^{1/5}}$.

Úloha 12.28 Odhadněte hustotu neutrálního vodíku podél zorného paprsku procházejícího přes mračno, při 10% absorpci ve středu čáry L_α. Koeficient absorpce ve středu čáry v přepočtu na 1 atom je $\kappa_C \cong 10^{-16}\,\mathrm{m}^2$, při předpokládané teplotě plynu přibližně 100 K.

Řešení: Při průchodu záření přes mračno plynu se zeslabuje e_τ krát, kde τ je optická tloušťka vrstvy plynu. Ve středu čáry L_α je rovna $\kappa_C N$, kde N je celkový počet atomů vodíku podél procházejícího se paprsku. Absorpce se stává podstatnou, jestliže $\kappa_C N = 0{,}1$. Odpovídající hustota na paprsku je $m_\mathrm{p} N = 0{,}1\frac{m_\mathrm{p}}{\kappa_C} \cong 2 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Spektrální analýza je tudíž velmi citlivou metodou.

Úloha 12.29 Mračno H I emituje spektrální čáru o vlnové délce 21 cm s optickou hloubkou v jejím středu $\tau_\mathrm{H} = 0{,}5$, jde o opticky tenkou čáru. Průměrná hustota plynu atomů v mračnu je $n_\mathrm{H} = 10\,\mathrm{cm}^{-3}$, teplota plynu je 100 K a šířka čáry, přepočítaná na rychlost je $\Delta v = 10\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Nalezněte tloušťku mračna l.

Řešení: Ze vztahu $\tau_{\mathrm{H}} = 5{,}2 \cdot 10^{-14} \frac{l}{T} \frac{n_{\mathrm{H}}}{\Delta v}$ určíme $l \cong 10^{18}$ m $\cong 32$ pc.

Úloha 12.30 Částice kosmického záření jsou udržovány v Galaxii prostřednictvím magnetického pole. Určete poloměr dráhy relativistické částice s nábojem e a energií 10^3 GeV kolem siločar magnetického pole o magnetické indukci $B \cong 5 \cdot 10^{-10}$ T.

Řešení: Platí $E = eBr$, odtud pro poloměr r v pc dostaneme $r = 1{,}08 \cdot 10^{-16} \frac{E}{B}$, je-li E v [GeV] a B [T]. Dosazením obdržíme $r = 2 \cdot 10^{-4}$ pc $= 41$ AU.

13 Extragalaktická astronomie

Úloha 13.1 Naše Galaxie s hmotností přibližně $2{,}5 \cdot 10^{11}\, M_\odot$ a galaxie v souhvězdí Andromedy M 31 o hmotnosti $3{,}6 \cdot 10^{11}\, M_\odot$ jsou dvě největší galaxie v Místní soustavě galaxií. Předpokládejme, že tvoří dvojnou soustavu a obíhají kolem společného hmotného středu po kruhových drahách. Určete velikost oběžné doby, jestliže vzdálenosti mezi nimi je asi 700 kpc.

Řešení: $T = \left(\frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{M_1 + M_2} \right)^{1/2} \cong 7 \cdot 10^{10}$ roků, tedy asi 70 miliard let.

Úloha 13.2 Maximální zploštění, tzv. míra eliptičnosti, u eliptických galaxií je definována vztahem $\frac{a-b}{a} 10 = 7$. Určete největší poměr velké a malé osy elipsoidu eliptických galaxií.

Řešení: Dosazením obdržíme $\frac{a}{b} = 3{,}3$

Úloha 13.3 Které z emisních čar v následující tabulce můžeme z povrchu Země pozorovat v optickém oboru spektra u kvasaru s následujícím rudým posuvem
a) z = 0,1
b) z = 1,0
c) z = 4,0.
Tabulka hlavních emisních čar u aktivních galaxií a kvasarů:

L_α	121,6 nm	H_β	486,1 nm
N V	124,0 nm	O III	495,9 nm
C IV	154,9 nm	O III	500,7 nm
C III	190,9 nm	N II	654,8 nm
Mg II	279,8 nm	H_α	656,3 nm
O II	372,7 nm	N II	658,4 nm
Ne III	386,8 nm	S II	671,7 nm
H_δ	410,2 nm	S II	673,1 nm
H_γ	434,1 nm		

Řešení: Při výběru vhodných čar vyjdeme ze vztahu $(z + 1)\, \lambda_l = \lambda_p$, kde λ_p musí být v optické části spektra. Tedy v případě a) všechny čáry od Ne III, b) čáry C III až po čáru Ne III, c) čáry L_α až C IV.

Úloha 13.4 Ve spektru kvasaru byl optickou spektroskopií zjištěn rudý posuv $z = 2{,}5$. Které emisní čáry byly při tomto zjištění použity? Viz tabulka předcházející úlohy.

Řešení: Využijeme vztah $(z + 1)\, \lambda_l = \lambda_p$. Nejvhodnější a nejčastěji používanou čarou je L_α.

Úloha 13.5 Ve spektru kvasaru 3C 273 byly zjištěny široké intenzivní emisní čáry o naměřených vlnových délkách 761,3 nm, 563,9 nm a 503,4 nm. Určete, kterém prvku náleží. Stanovte vzdálenost kvasaru. Jaký je jeho zářivý výkon, jestliže hustota zářivého toku zjištěná v horních vrstvách atmosféry Země je rovna $6{,}2 \cdot 10^{-14}\, \mathrm{W \cdot m^{-2}}$.

Řešení: Použitím vztahu $(z+1)\lambda_\mathrm{l} = \lambda_\mathrm{p}$ zjistíme, že jde postupně o čáry H_α, H_β, H_γ vodíku. Vzdálenost je $r = cz/H = 640\,\mathrm{Mpc}$. Zářivý výkon kvasaru stanovíme ze vztahu $L = 4\pi r^2 F_\mathrm{bol} = 3\cdot 10^{38}\,\mathrm{W}$.

Úloha 13.6 Ve spektru kvasaru 3C 273 je emisní čára vodíku H_β o laboratorní vlnové délce 486,1 nm posunuta o 77,8 nm směrem k dlouhovlnnému konci spektra. Určete
a) vzdálenost kvasaru
b) lineární rozměry kvasaru, jestliže úhlový průměr činí $2\alpha = 0{,}24''$
b) lineární velikost výtrysku l z kvasaru, jehož úhlová velikost je $19{,}5''$
c) jeho zářivý výkon, jestliže absolutní bolometrická hvězdná velikost je – 25 mag.

Řešení: Vzdálenost kvasaru určíme ze vztahu $r = \frac{c}{H}z = 640\,\mathrm{Mpc}$. Přibližný skutečný průměr kvasaru je $D = r2\alpha = 2\cdot 10^{19}\,\mathrm{m} = 700\,\mathrm{pc}$. Velikost výtrysku je $l = 2\cdot 10^{21}\,\mathrm{m} = 70\,\mathrm{kpc}$. Zářivý výkon kvasaru je $7{,}9\cdot 10^{11}\,L_\odot$.

Úloha 13.7 Zářivý výkon kvasarů dosahuje $10^{40}\,\mathrm{W}$. Fyzikální podstata procesů umožňujících tak obrovské uvolňování energie není dosud definitivně objasněna. Vypočtěte množství hmoty v jednotkách $M_\odot$ za rok, které se přemění, aby pokrývalo odpovídající zářivý výkon při
a) termonukleárním hoření s účinností $\eta = 0{,}01$
b) akreci na relativistický objekt s účinností $\eta = 0{,}1 - 0{,}3$.

Řešení: Úbytek hmoty je roven $\frac{dM}{dt} \cong 1{,}5\,\eta^{-1} M_\odot\cdot \mathrm{rok}^{-1}$. Při termonukleárním hoření je úbytek přibližně $150\,M_\odot\cdot\mathrm{rok}^{-1}$, při akreci a volbě $\eta = 0{,}2$ obdržíme $7{,}5\,M_\odot\cdot\mathrm{rok}^{-1}$.

Úloha 13.8 Dosud nejvzdálenější klasické cefeidy (s typickými periodami 1 - 50 dnů) byly objeveny za pomoci Hubbleova kosmického dalekohledu v galaxii M 100, která je součástí bohaté kupy galaxií v souhvězdí Panny. Na obr. je znázorněna závislost pozorované vizuální hvězdné velikosti a periody pulsace, tedy závislost perioda – zářivý výkon. Užitím dvou cefeid nejblíže položených k přímkové závislosti, na grafu označených, stanovte jejich vzdálenost a tudíž vzdálenost galaxie M 100.

Řešení: U první cefeidy $m_\mathrm{v} = 26{,}3\,\mathrm{mag}$, $\log P = 1{,}39\,\mathrm{dne}$. Ze závislosti $M_\mathrm{V} = -2{,}80\log P - 1{,}43$ stanovíme $M_\mathrm{V} = -5{,}3\,\mathrm{mag}$. Dosazením do vztahu $\log r = 1 + 0{,}2\,(m_\mathrm{v} - M_\mathrm{V}) = 7{,}32$, $r \cong 20\,\mathrm{Mpc}$. U druhé cefeidy analogicky $m_\mathrm{v} = 25{,}6\,\mathrm{mag}$, $\log P = 1{,}61\,\mathrm{dne}$, $M_\mathrm{V} = -5{,}94\,\mathrm{mag}$. Vzdálenost $\log r = 7{,}31\,\mathrm{pc}$, tudíž $r \cong 20\,\mathrm{Mpc}$.

Úloha 13.9 Odhadněte hmotnost černé díry v jádře Galaxie, jestliže bylo zjištěno, že oběžné doby hvězd obíhajících ve vzdálenosti 275 AU od jádra jsou 2,8 roků.

Řešení: Hmotnost centrálního tělesa – černé díry určíme z III. Keplerova zákona v přesném tvaru $M \cong \frac{R^3}{G}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cong 2{,}6\cdot 10^6\,M_\odot$.

Úloha 13.10 Na základě studia rudého posuvu velkého počtu galaxií bylo prokázáno, že existuje jejich značná koncentrace v směru souhvězdí Centaura, ve vzdálenosti odpovídající rychlosti $4\,350\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Galaxie tvoří útvar nazývaný Great Attractor, česky Velká zeď. V jaké vzdálenosti leží hmotný střed tohoto útvaru a jaká je jeho hmotnost? Naše Galaxie se pohybuje směrem k Velké zdi rychlostí $570\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Řešení: Podle Hubbleova zákona $r = v/H = 4350/75 = 58\,\mathrm{Mpc}$. Předpokládejte, že Velká zeď je tvořena gigantickou kupou galaxií, pro kterou platí viriálová věta. Po dosazení údajů naší Galaxie obdržíme pro hmotnost kupy galaxií $M = 2R\langle v^2\rangle/G = 1{,}7 \cdot 10^{46}\,\mathrm{kg} \approx 10^{16}\,M_\odot$.

Úloha 13.11 V kupě galaxií čítající asi 10 000 galaxií v souhvězdí Vlas Bereničin, byl u 100 nejjasnějších galaxií spektroskopicky zjištěn průměrný rudý posuv $\langle z\rangle = 0{,}0232$. Při znalosti Hubbleovy konstanty $H = 75\,\mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$ určete vzdálenost kupy galaxií.

Řešení: Rychlost vzdalování je $v = cz = 6\,960\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$, vzdálenost $r = v/H = 93\,\mathrm{Mpc}$.

Úloha 13.12 Určete zářivý výkon černé díry o hmotnosti $10^7\,M_\odot$, je-li účinnost procesu 5 %.

Řešení: Vyjdeme ze vztahu pro Eddingtonův zářivý výkon $L_{\mathrm{Ed}} = 4\pi c G m_{\mathrm{p}} M/\sigma_{\mathrm{T}}$. Při 5% účinnosti je zářivý výkon aktivního galaktického jádra $6 \cdot 10^{36}\,\mathrm{W}$.

Úloha 13.13 Model jádra aktivní galaxie předpokládá, že kolem černé díry s velkou hmotností krouží akreční disk, jehož typický poloměr je $r_a = 10^{14}\,\mathrm{m}$. Určete velikost vyzářeného výkonu při dopadu plynu o hmotnosti $1\,M_\odot$ za rok z akrečního disku na černou díru o hmotnosti $10^8\,M_\odot$.

Řešení: Schwarzschildův poloměr černé díry je $r_S = \frac{2GM}{c^2} = 3 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$. Předpokládáme tempo pádu látky o hmotnosti $m = 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg \cdot rok^{-1}} = 6 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$. Uvolněná gravitační potenciální energie je $E_p = GMm\left(\frac{1}{r_S} - \frac{1}{r_a}\right) = 3 \cdot 10^{39}\,\mathrm{J}$, což pro zářivý výkon aktivní galaxie dává $\cong 10^{39}\,\mathrm{W}$.

Úloha 13.14 Šířka čáry H_β ve spektru jádra seyfertovské galaxie je zhruba 3 nm. Jaké jsou charakteristické rychlosti pohybu mračen plynu v jádře takové galaxie?

Řešení: V důsledku pohybu mračen dochází k rozšíření čáry. Platí vztah pro Dopplerův jev $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$. Polovina pozorované šířky 1,5 nm odpovídá maximálnímu posuvu čar do červené respektive fialové části optického spektra pro mračna pohybující se největší rychlostí podél zorného paprsku. Pro vlnovou délku $\lambda = 486{,}1\,\mathrm{nm}$ obdržíme při dosazení $v = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1000\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

Úloha 13.15 Emisní čáry plynu ve středu gigantické eliptické galaxie M 87, NGC 4486 byly zkoumány spektrografem na Hubbleově kosmickém dalekohledu. Ze spektrální diagnostiky čáry O II 372,7 nm byla určena oběžná rychlost $500\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ plynu při poloměru 0,25”. Odhadněte hmotnost centrální oblasti uvnitř prstence. Za předpokladu, že se jedná o černou díru určete její Schwarzschildův poloměr. U galaxie M 87 byla zjištěna hodnota $z = 0{,}004$.

Řešení: Nejprve z Hubbleova zákona stanovíme vzdálenost $r = \frac{v}{H} = \frac{cz}{H} = 16\,\mathrm{Mpc}$. Úhlový poloměr převedeme, $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad}$. Skutečný poloměr prstence je $R = \alpha r = 5{,}9 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m}$. Při zanedbání hmotnosti látky vně disku a jejím sféricko-symetrickém rozložení můžeme psát $\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow M = \frac{v^2 R}{G} \cong 2 \cdot 10^{39}\,\mathrm{kg} \cong 10^9\,M_\odot$. Dosazením do vztahu pro Schwarzschildův poloměr $R_{\mathrm{S}} = \frac{2GM}{c^2} \cong 3 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m} \cong 10^{-4}\,\mathrm{pc}$.

Úloha 13.16 Vnitřní okraj plynného disku aktivního galaktického jádra galaxie M 106,

NGC 4258 byl pozorován ve vzdálenosti 0,004" od středu. Zjištěná hodnota radiální rychlosti u této galaxie je $580\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Stanovte vzdálenost a určete poloměr vnitřního okraje disku v pc, plyn obíhá kolem středu rychlostí $1\,100\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Určete hmotnost disku.

Řešení: Z Hubbleova zákona stanovíme vzdálenost $r = 7{,}7\,\mathrm{Mpc}$. Při známé úhlové velikosti poloměru $\alpha = 1{,}9\cdot 10^{-8}\,\mathrm{rad}$ obdržíme pro skutečný poloměr $R = \alpha r \cong 4{,}5\cdot 10^{15}\,\mathrm{m} \cong 0{,}15\,\mathrm{pc}$. Hmotnost určíme ze vztahu $M = \frac{v^2 R}{G} = 8\cdot 10^{37}\,\mathrm{kg} \cong 4\cdot 10^7\,M_\odot$.

Úloha 13.17 Rádiový zdroj v jádře aktivní galaxie má úhlovou velikost $0{,}001''$, kosmologický rudý posuvu je $z = 0{,}5$. Určete lineární rozměry zdroje v pc.

Řešení: Rychlost vzdalování stanovíme ze vztahu $v = c\frac{(1+z)^2-1}{(1+z)^2+1} = 0{,}38c$. Vzdálenost určíme z Hubbleova zákona $r = \frac{v}{H} = 1500\,\mathrm{Mpc}$. Skutečná lineární velikost zdroje je $D = 10^{-3}\,1{,}5\cdot 10^9 = 1{,}5\cdot 10^6\,\mathrm{AU} = 7{,}5\,\mathrm{pc}$.

Úloha 13.18 U rádiové galaxie Centaurus A, nacházející se ve vzdálenosti 5 Mpc, byl na frekvenci 1400 MHz zjištěn monochromatický tok $F = 10^3\,\mathrm{Jy}$. Určete zářivý výkon v rádiovém oboru ($10^7\,\mathrm{Hz} - 10^{10}\,\mathrm{Hz}$) této galaxie, jestliže spektrální index $\alpha = 0{,}8$.

Řešení: Rádiový výkon galaxie vypočteme $L_r = 4\pi r^2 \int_{\nu_1}^{\nu_2} F_\nu \mathrm{d}\nu \cong 10^{34}\,\mathrm{W}$.

Úloha 13.19 U kvasaru PC 1247+3406 byly ve spektru identifikovány emisní vodíkové čáry, mimo jiných také čára L_α $\lambda_l = 121{,}6\,\mathrm{nm}$. Detekována na Zemi má čára vlnovou délku $\lambda_p = 721{,}4\,\mathrm{nm}$. Určete rychlost vzdalování kvasaru.

Řešení: Při hodnotě $z = \frac{\lambda_p - \lambda_l}{\lambda_l} = 4{,}93$ je rychlost $v = c\frac{(1+z)^2-1}{(1+z)^2+1} = 0{,}95c$.

Úloha 13.20 Druhý nejsilnější rádiový zdroj na obloze po Slunci je rádiová galaxie Cygnus A, vyznačuje se rudým posuvem $z = 0{,}057$. Na frekvenci $\nu = 2000\,\mathrm{MHz}$ byla zjištěna spektrální hustota toku záření $10^3\,\mathrm{Jy}$, tedy $10^{-23}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot Hz^{-1}}$. Při znalosti spektrálního indexu $\alpha = 0{,}75$ určete zářivý výkon v rádiovém oboru galaxie Cyg A, předpokládáme kmitočtový rozsah $\nu_1 = 10^7\,\mathrm{Hz}$ a $\nu_2 = 10^{10}\,\mathrm{Hz}$.

Řešení: Nejprve určíme vzdálenost $r = \frac{cz}{H} = 230\,\mathrm{Mpc}$. Zářivý výkon v rádiovém oboru je $L_r = 4\pi r^2 \int_{\nu_1}^{\nu_2} F_\nu \mathrm{d}\nu \cong 10^{37}\,\mathrm{W}$.

Úloha 13.21 Zdůvodněte hypotézu, že široké vodíkové emisní čáry vznikají při pohybech velkých oblastí látky v kvasarech. Jejich šířky jsou v optické oblasti asi $\Delta z \cong 5\cdot 10^{-3}$. Teplotu těchto oblastí odhadujeme na $10^4\,\mathrm{K}$.

Řešení: Při $\Delta z \cong \frac{\Delta v}{c} \Rightarrow \Delta v \cong 1{,}5\cdot 10^6\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Rychlost tepelného pohybu při zadané teplotě je $v_\mathrm{t} \cong \left(\frac{2kT}{m_\mathrm{H}}\right)^{1/2} \cong 10^4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, kde předpokládáme hmotnost atomu vodíku $m_\mathrm{H} = 1{,}7\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Tudíž vznik spektrálních čar v kvasarech bude spojen s pohybem celých oblastí – mračen vyzařujícího plynu, jejich rychlost podstatně převyšuje rychlost tepelného pohybu částic.

Úloha 13.22 Předpokládaným zdrojem aktivity jader galaxií a kvasarů může být akrece látky na černou díru s velkou hmotností. Minimální velikost oblasti vyzařování je v takovém

případě řádově rovna gravitačnímu poloměru černé díry $R_g = \frac{2GM}{c^2}$. Maximální zářivý výkon zpravidla klademe $L_{\mathrm{Ed}} = \frac{4\pi Gc}{\kappa} M$. Předpokládáme-li akreci jako zdroj energie u kvasaru 3C 273 určete minimální hodnotu hmotnosti černé díry a minimální dobu proměnnosti záření. Zářivý výkon položte $L = 10^{40}\,\mathrm{W}$.

Řešení: Minimální hmotnost černé díry je $8{\cdot}10^8\,M_\odot$, minimální doba proměnnosti je 2,1 hod.

Úloha 13.23 Určete charakteristickou hmotnost jádra seyfertovské galaxie předpokládáme-li, že pozorované široké emisní čáry vznikají v kvazistacionární obálce plynu kolem jádra o poloměru 0,1 pc. Spektroskopicky určená rychlost plynu je přibližně $930\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Řešení: $M \cong \frac{v^2}{G} R \cong 2\cdot 10^7\,M_\odot$.

Úloha 13.24 Ve vymezené oblasti prostoru o poloměru $R = 5{,}2\cdot 10^5\,\mathrm{pc}$ existuje kupa galaxií obsahující 670 pozorovatelných galaxií. Jejich střední rychlost vzhledem k inerciálnímu systému spojenému s hmotným středem kupy činí $1050\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Určete tzv. viriálovou hmotnost této kupy.

Řešení: Pro gravitačně vázanou kupu platí viriálová věta $\langle E_k\rangle = -\frac{1}{2}\langle E_p\rangle$, dosazením obdržíme $mv^2 = G\frac{mM}{r}$, odkud $M = \frac{2R}{G}\langle v^2\rangle \cong 10^{14}\,M_\odot$.

Úloha 13.25 Pohyb Země (Galaxie) ve směru souhvězdí Lva způsobuje tzv. dipólovou anizotropii reliktního záření vzhledem k jeho střednímu rozložení. Zjištěná rozdílnost teplot ve směru apexu a antiapexu je rovna $\Delta T = 7\cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}$, střední teplota reliktního záření je $T_0 = 2{,}7\,\mathrm{K}$. Tedy v důsledku platnosti Dopplerova jevu se reliktní záření ve směru pohybu jeví jako teplejší, v protilehlém směru chladnější. Určete rychlost pohybu Země v, předpokládáme-li, že úhel ϑ mezi směrem vektoru rychlosti a směrem pozorování je nulový, tedy $\cos\vartheta = 1$.

Řešení: Pro teplotu záření ve směru apexu platí $T = T_0\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)$, $T - T_0 = \frac{\Delta T}{2}$. Dosazením určíme $v \cong 400\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Úloha 13.26 Předpokládejme, že kosmický prostor je rovnoměrně vyplněn galaxiemi se stejnou absolutní hvězdnou velikostí a je dokonale průzračný. Dokažte, že podíl počtu galaxií do $(m+1)$ pozorované hvězdné velikosti a počtu galaxií m-té hvězdné velikosti je roven $\frac{N(m+1)}{N(m)} = 3{,}98$.

Řešení: Z upravené Pogsonovy rovnice, při zadaných podmínkách, dostaneme pro vzdálenost vztah $r = 10^{1-0{,}2M}10^{0{,}2m}$. Celkový počet galaxií s hvězdnou velikostí m je roven $N(m) \sim r^3 \sim 10^{0{,}6m}\cdot 10^{3(1-0{,}2M)}$. Odtud pro poměr dostaneme $\frac{N(m+1)}{N(m)} = \frac{10^{0{,}6(m+1)}}{10^{0{,}6m}} = 10^{0{,}6} = 3{,}98$.

Úloha 13.27 Kterých částic je v současné době ve vesmíru více, reliktních fotonů nebo protonů? Střední hustota látky ve vesmíru je $10^{-27}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Teplota reliktních fotonů je 2,7 K.

Řešení: Celkový počet fotonů v $1\,\mathrm{m^3}$ je $N = \int_0^\infty \frac{8\pi}{\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda}\right)-1} = 2\cdot 10^7 T^3$. V každém $\mathrm{m^3}$ je v současné době $2\cdot 10^7\, 2{,}7\cdot 10^3 \cong 4\cdot 10^8$ fotonů. Předpokládáme-li, že základní příspěvek pro střední hustotu vesmíru dává vodík, potom počet protonů je roven $\frac{10^{-27}}{1{,}67\cdot 10^{-27}} \cong 0{,}6\,\mathrm{m^{-3}}$. Při započtení části skryté hmoty, kterou by mohla tvořit např. neutrina s nenulovou klidovou

hmotností, by koncentrace protonů byla ještě nižší. Shrnuto ve vesmíru je reliktních fotonů asi 10^9 krát více než protonů. Základní jednotky stavební hierarchie vesmíru – hvězdy však jsou složeny převážně z protonů.

Úloha 13.28 Odvoďte v rámci klasické fyziky vztah mezi kritickou hustotou a Hubbleovou konstantou. Odhadněte stáří vesmíru.

Řešení: Zkoumejme sférickou oblast prostoru o hmotnosti $M = \text{konst}\cdot$, $\rho = \rho(t)$, $R = R(t)$. V ní se pohybují částice – galaxie o hmotnosti m, částice na povrchu koule má rychlost v_R. Platí vztah pro celkovou mechanickou energii $\frac{1}{2}mv_R^2 - G\frac{mM}{R} = W_c$. Odtud pro hustotu energie w dostaneme $\frac{1}{2}v_R^2 - G\frac{M}{R} = w$. V určitém čase $t = t_0$, platí podle Hubbleova zákona $v_R = H\,R(t)$ a dále $\rho = \rho(t_0)$. Úpravou obdržíme $R^2\left(\frac{1}{2}H^2 - \frac{4}{3}G\pi\rho\right) = w$. V kritickém stavu při $R \to \infty$ je $\frac{w}{R^2} \to \infty$ platí $\frac{1}{2}H^2 - \frac{4}{3}G\pi\rho_k = 0$, odtud $\rho_k = \frac{3}{8}\frac{H^2}{\pi G}$. Při střední rychlosti expanze $v_R \cong \frac{R}{t}$, odkud s použitím Hubbleova zákona $v_R = H\,R$ obdržíme $t \cong \frac{1}{H}$. Přijmeme-li Hubbleovu konstantu $H = 75\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$ je $t \cong 10^{10}$ roků.

14 Počítačové úlohy

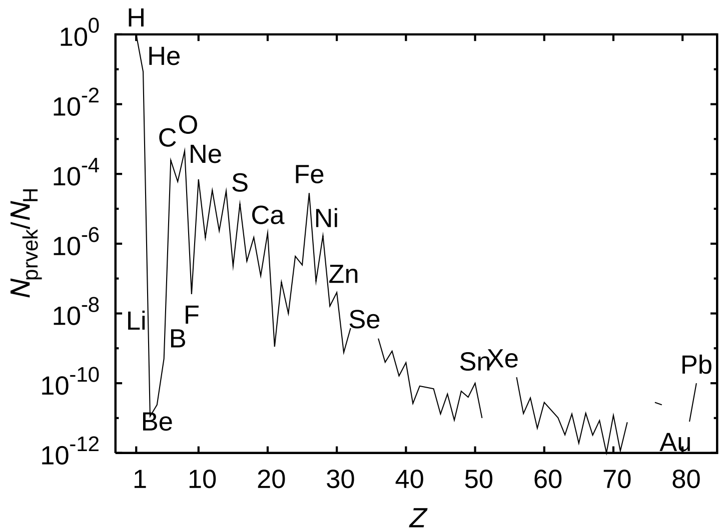
14.1 Astrofyzikální metody

Úloha 14.1 Pomocí databáze SIMBAD (`http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/`) nalezněte souřadnice, radiální rychlost a paralaxu a) hvězdy Arcturus, b) hvězdy HD 37776, c) galaxie M 31.

Řešení: Na stránce `http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/` zvolíme hledání prostřednictvím názvu ("Query by identifier") a jako "Identifier" zadáme název hvězdy.
a) $\alpha = 14^{\mathrm{h}}15^{\mathrm{m}}39{,}6720^{s}$, $\delta = 19°10'56{,}677''$, $v_{\mathrm{rad}} = -5{,}2\pm0{,}9\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$, $\pi = (88{,}85\pm0{,}74)\cdot10^{-3}$ arcsec,
b) $\alpha = 5^{\mathrm{h}}40^{\mathrm{m}}56{,}3704^{s}$, $\delta = -1°30'25{,}852''$, $v_{\mathrm{rad}} = 27\pm5\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $\pi = (1{,}96\pm0{,}98)\cdot10^{-3}$ arcsec,
c) $\alpha = 0^{\mathrm{h}}42^{\mathrm{m}}44{,}31^{s}$, $\delta = 41°16'09{,}4''$, $v_{\mathrm{rad}} = -301 \pm 7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Úloha 14.2 Na základě dat z článku autorů M. Asplund, N. Grevesse a A. J. Sauval "The Solar Chemical Composition" (2005, ASP Conference Series, Vol. 336, str. 25) nakreslete graf relativního zastoupení jednotlivých prvků (vzhledem k vodíku) ve sluneční atmosféře. Stanovte hmotnostní podíl prvků těžších než helium.

Řešení: Na stránce `http://adsabs.harvard.edu` zvolíme "Search", "Astronomy and Astrophysics Search", hledáme např. články autora "Asplund" z roku 2005. Vybereme hledaný článek, který je možné získat prostřednictvím stránek `xxx.lanl.gov` (volba "arXiv e-print"). V Tabulce 1 tohoto článku jsou uvedeny hodnoty relativního zastoupení jednotlivých prvků jako $\log(N_{\mathrm{prvek}}/N_{\mathrm{H}}) + 12$. S jejich pomocí nakreslíme graf a spočteme relativní hmotnostní zastoupení těžších prvků $Z = 0{,}0122$.



Obrázek 1: Relativní zastoupení jednotlivých prvků v atmosféře Slunce

Úloha 14.3 Nalezněte deset nejbližších hvězd viditelných pouhým okem.

Řešení: Na stránkách CDS (`http://cds.u-strasbg.fr`) zvolíme VizieR, databáze "HIP" (Hipparcos), klepneme na "Find Catalogue", zvolíme "I/239/hip_main", v políčku Vmag vyplníme "<6", zvolíme "Sort" podle políčka "Plx", zvolíme "Output Order" jako "–" a klepneme na "Submit Query" a získáme seznam nejbližších a nejjasnějších hvězd (viz tabulka, ve které je zaneseno prvních deset z nich). Označení bylo získáno pomocí databáze SIMBAD.

HIP	hvězda	m_V [mag]	π [10^{-3} arcec]
71681	α Cen B	1,35	$742{,}12 \pm 1{,}40$
71683	α Cen A	-0,01	$742{,}12 \pm 1{,}40$
32349	α CMa (Sirius)	-1,44	$379{,}21 \pm 1{,}58$
16537	ε Eri	3,72	$310{,}75 \pm 0{,}85$
104214	61 Cyg	5,20	$287{,}13 \pm 1{,}51$
37279	α CMi (Prokyon)	0,40	$285{,}93 \pm 0{,}88$
108870	ε Ind	4,69	$275{,}76 \pm 0{,}69$
8102	τ Cet	3,49	$274{,}17 \pm 0{,}80$
19849	o Eri	4,43	$198{,}24 \pm 0{,}84$
88601	70 Oph	4,03	$196{,}62 \pm 1{,}38$

14.2 Sluneční soustava

Úloha 14.4 V jedné ze svých knih A. C. Clarke píše o tom, že Halleyova kometa má dvě oddělená jádra. Pomocí databáze NASA ADS (`http://adsabs.harvard.edu`) ověřte, zda je toto tvrzení hodnověrné.

Řešení: Na stránce `http://adsabs.harvard.edu` zvolíme vyhledávání ("Search"), "Astronomy and Astrophysics Search" a jako položku "Title Words" zvolíme klíčová slova "Halley comet splitting". Získáme několik odkazů věnujících se rozpadu jádra Halleyovy komety během jejího posledního průchodu kolem Slunce. Tvrzení je jednou z úspěšných předpovědí autora.

14.3 Záření hvězd

Úloha 14.5 Nakreslete křivku vyzařování černého tělesa pro teploty 5 000 K a 5 780 K. Čím se liší?

Řešení: Pro spektrální hustotu energie vyzařování černého tělesa platí

$$E(\lambda) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

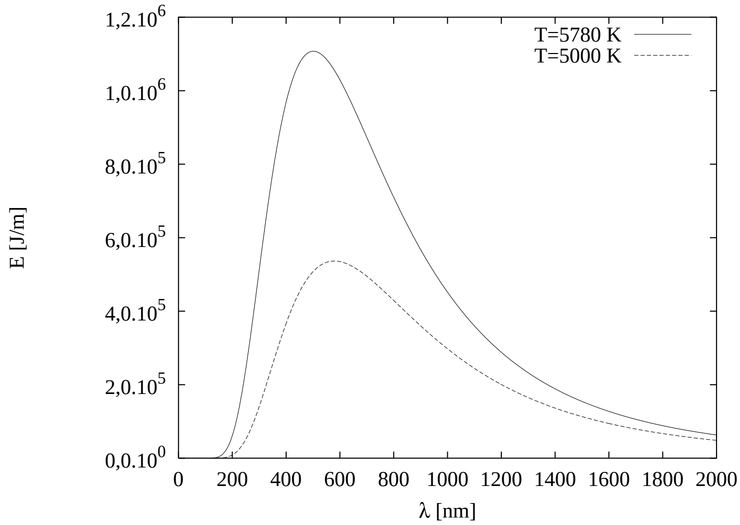
Pro výpočet lze použít například následující funkci:

```
function b(tep,lam:double):double;

const h=6.6256e-34;      {Planckova konstanta}
      c=2.99792e8;       {rychlost svetla}
      bolk=1.38054e-23; {Boltzmannova konstanta}
```

```
var lam5:double;

begin
 lam5:=lam*lam*lam*lam*lam;
 b:=8.0*pi*h*c/lam5/(exp(h*c/lam/bolk/tep)-1.0);
end;
```



Obrázek 2: Závislost spektrální hustoty vyzařování černého tělesa na vlnové délce.

Graf závislosti Planckovy funkce na vlnové délce pro teploty 5 000 K a 5 780 K je na obrázku 2. Jsou patrné dva závěry. V celém intervalu vlnových délek platí, že spektrální hustota vyzařovaná tělesem s vyšší teplotou je větší. Patrný je posuv maxima obou křivek, pro vyšší teploty směrem k nižším vlnovým délkám.

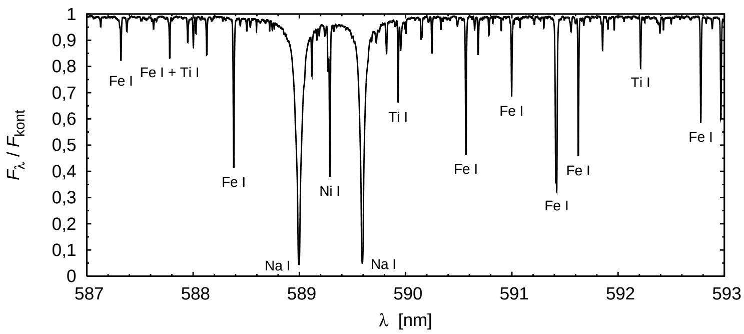
Úloha 14.6 Pomocí katalogů CDS nalezněte pět nejjasnějších hvězd v rentgenovém oboru, které mají spektrální typ O nebo B.

Řešení: Na stránce `http://cdsweb.u-strasbg.fr` zvolíme "VizieR", jako "Wavelength" zvolíme "X-ray", jako "Astronomical keywords" zvolíme "Stars:early-type" a zadáme hledání ("Find Catalogues"). Vybereme katalog odpovídající úloze, "ROSAT all-sky survey catalogue of OB stars", "Detections". V prohledávání zvoleného katalogu zaškrtneme třídění ("Sort") podle pozorované hustoty toku rentgenového záření ("Apparent X-ray flux"). Aby se třídění opravdu provedlo, je nutné ještě zadat vhodnou podmínku ("Constraint", vzhledem k velikosti pozorovaného toku např. "< 0"). Je nutné navíc zvolit "Output Order" jako "-". Z tabulky zjistíme, že nejjasnějšími hvězdami spektrálních typů O nebo B v rentgenovém oboru jsou X Per ($F_x = 1{,}0 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$), β Per ($F_x = 6{,}6 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$), γ Cas ($F_x = 3{,}0 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$), θ^1 Ori ($F_x = 2{,}8 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$) a ι Ori ($F_x = 2{,}5 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$).

14.4 Základy hvězdné spektroskopie

Úloha 14.7 Pomocí atlasu slunečního spektra http://bass2000.obspm.fr/solar_spect.php nakreslete sluneční spektrum v intervalu vlnových délek 587 – 593 nm a pokuste se identifikovat nejsilnější čáry.

Řešení: Na uvedené stránce získáme potřebná data. Zdroj pro identifikaci čar nalezneme v katalozích CDS, `http://cdsweb.u-strasbg.fr/cats/Cats.htx`, zvolíme hledání "identification spectrum", katalog "VI/26 Identification list of lines in Stellar Spectra (Moore, 1959)" a jeho novou verzi "VI/71A Revised version of the ILLSS Catalogue (Coluzzi 1993-1999)", v prohledávání zvoleného katalogu ("VizieR query form") zadáme podmínku pro vlnové délky jako "> 5870 && < 5930" a identifikujeme čáry. Výsledný graf je na obrázku 3.



Obrázek 3: Sluneční spektrum v oblasti sodíkového dubletu

14.5 Nitro hvězd

Úloha 14.8 S použitím programu STATSTAR vypočtěte model hvězdy se sluneční hmotností (s parametry[1] hmotnost, zářivý výkon a efektivní teplota rovnými $1{,}0\,M_\odot$, $0{,}86071\,L_\odot$ a $5\,500{,}2$ K, chemické složení odpovídá Slunci, $X = 0{,}7$, $Y = 0{,}292$ a $Z = 0{,}008$).

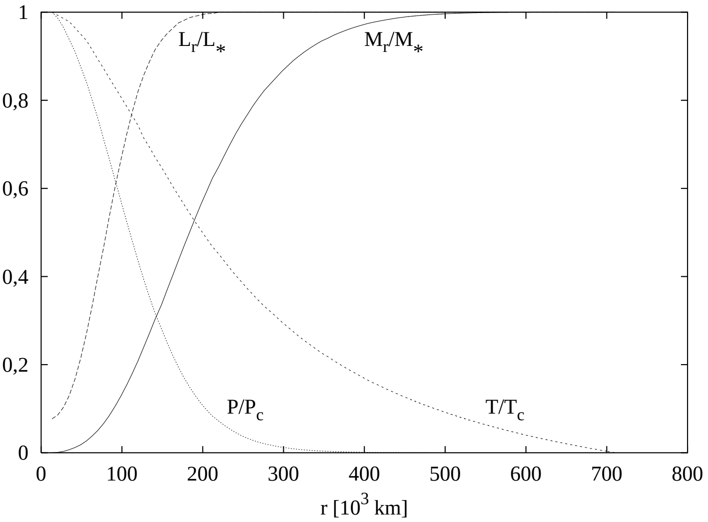
1. Nakreslete závislost P, M_r, L_r a T na r.

2. Pro jakou teploty a pro jaký poloměr dosahuje L_r 99% a 50% své povrchové hodnoty? Jaká tomu odpovídá hodnota M_r?

Řešení: Graf jednotlivých závislostí je na obr. 4.

Úloha 14.9 Pomocí programu STATSTAR vypočtěte model hvězdy na hlavní posloupnosti

[1]Přesné hodnoty parametrů hvězd jsou uvedeny pouze pro získání daného modelu stavby hvězdy (jsou vybrány tak, aby byly splněny příslušné okrajové podmínky diferenciálních rovnic popisujících stavbu hvězd) a nemají tedy astrofyzikální smysl.



Obrázek 4: Model hvězdy se sluneční hmotností

s hmotností $1{,}0\,M_\odot$ (pro tuto hvězdu jsou zářivý výkon a efektivní teplota rovny $0{,}86071\,L_\odot$ a $5\,500{,}2\,\mathrm{K}$) a porovnejte ho s modelem hvězdy o hmotnosti $0{,}75\,M_\odot$ (pro tuto hvězdu jsou zářivý výkon a efektivní teplota rovny $0{,}1877\,L_\odot$ a $3\,839{,}1\,\mathrm{K}$). Pro obě hvězdy předpokládejte chemické složení odpovídající Slunci ($X = 0{,}7$, $Y = 0{,}292$ a $Z = 0{,}008$).

Řešení: Centrální tlak a teplota hvězdy se sluneční hmotností ($T_c = 1{,}4 \cdot 10^7\,\mathrm{K}$, $\rho_c = 7{,}7 \cdot 10^4\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) jsou vyšší než odpovídající hodnoty pro hvězdu s hmotností nižší ($T_c = 1{,}1 \cdot 10^7\,\mathrm{K}$, $\rho_c = 6{,}8 \cdot 10^4\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$).

Úloha 14.10 Porovnejte parametry hvězd s hmotností $1{,}0\,M_\odot$ s různými chemickými složeními $X = 0{,}7$, $Y = 0{,}292$, $Z = 0{,}008$ a $X = 0{,}7$, $Y = 0{,}29$, $Z = 0{,}01$. Vysvětlete případné rozdíly.

Řešení: Hvězda s vyšším obsahem kovů má nižší efektivní teplotu ($T_{\mathrm{ef}} = 5\,280\,\mathrm{K}$) a zářivý výkon ($L = 0{,}76104 L_\odot$) než hvězda s chemickým složením shodným se Sluncem (viz. příklad 14.8). Důvodem je větší opacita látky hvězdy s vyšším obsahem kovů. U hvězdy s menším zářivým výkonem je nižší centrální teplota.

Úloha 14.11 Pomocí programu STATSTAR vypočtěte teoretickou hlavní posloupnost pro hvězdy s hmotnostmi $0{,}5\,M_\odot$ – $13{,}0\,M_\odot$. Zvolte sluneční chemické složení ($X = 0{,}7$, $Y = 0{,}292$ a $Z = 0{,}008$).

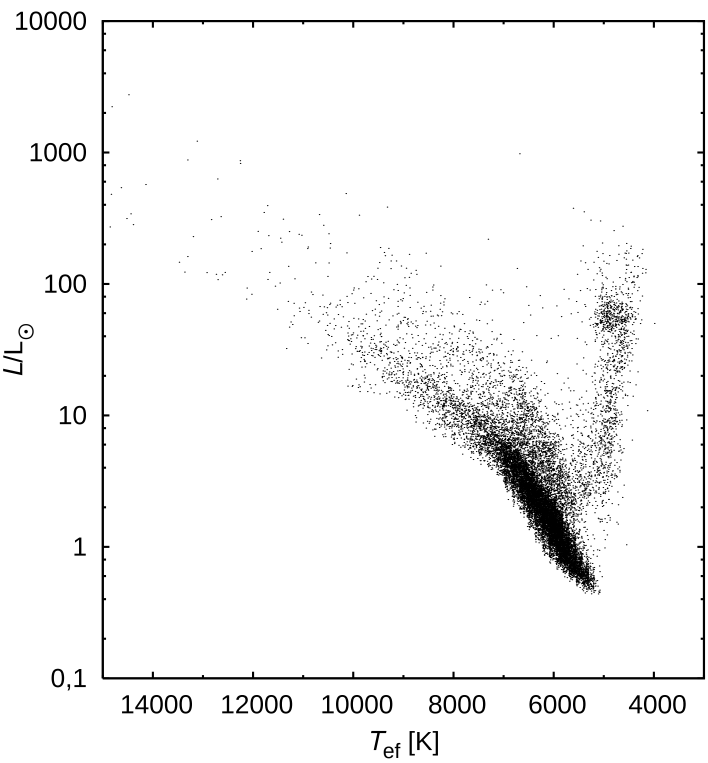
Řešení: Charakteristiky[2] hvězd hlavní posloupnosti získané programem STATSTAR jsou uvedeny v tabulce.

[2] Viz poznámka k úloze 14.8.

M [$M_{\odot}$]	L [$L_{\odot}$]	T_{ef}[K]
0,50	0,0213005	2321,4
0,70	0,129867	3523,0
1,00	0,86071	5500,2
1,50	6,39	8726,4
2,00	22,5809	11218,4
3,00	116,58	15007,3
4,00	341,1	17904,0
7,00	2260,2	24074,0
10,00	6641,5	28263,6
13,00	13789,5	31493,0

Úloha 14.12 Podle dat z článku Allende Prieto C., Lambert D. L., Astronomy & Astrophysics 352, 555, dostupných v databázi CDS `http://cdsweb.u-strasbg.fr` nakreslete HR diagram nejbližších hvězd nacházejících se do vzdálenosti 100 pc.

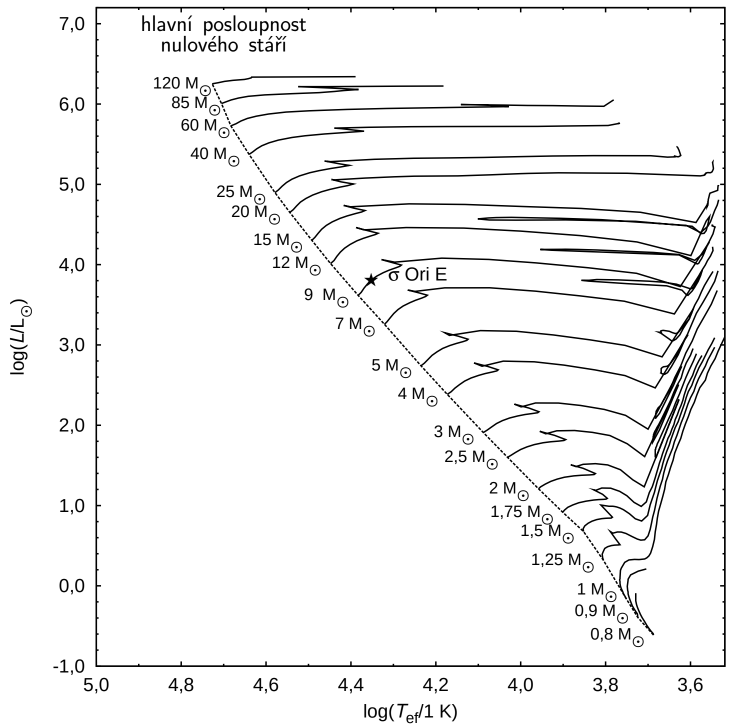
Řešení: Na uvedené stránce zvolíme např. "Catalogues ", hledání podle "Allende Prieto Lambert", zvolíme hledaný článek a získáme potřebný soubor (např. zvolíme stahování prostřednictvím http, soubor "`table1.dat.gz`". Formát souboru je popsán v popisu katalogu. Pomocí získaného souboru nakreslíme HR diagram (obrázek 5).



Obrázek 5: HR diagram nejbližších hvězd

Úloha 14.13 Nakreslete vývojový HR diagram. Potřebné soubory získejte na stránkách CDS `http://cdsweb.u-strasbg.fr` z článku Schaller G. a kol., Astronomy & Astrophysics Suppl. Ser. 96, 269. S pomocí nakresleného grafu odhadněte hmotnost hvězdy σ Ori E, pro kterou byla z pozorování zjištěna efektivní teplota 22 500 K a poloměr 5,3 $R_{\odot}$.

Řešení: Na uvedené stránce zvolíme např. "Catalogues ", hledání podle "Schaller" a zvolíme hledaný článek. Například prostřednictvím http získáme potřebné soubory "`table*`" a nakreslíme graf 6. Odhadovaná hmotnost hvězdy σ Ori E je 9 $M_{\odot}$.



Obrázek 6: Vývojový HR diagram

14.6 Hvězdné atmosféry

Úloha 14.14 Nakreslete graf závislosti poměru koncentrace neutrálního vodíku k celkové koncentraci vodíku v závislosti na teplotě za předpokladu termodynamické rovnováhy. Pro zjednodušení předpokládejte, že koncentrace elektronů je $n_e = 10^{17}\mathrm{m}^{-3}$.

Řešení: Pro Sahovo rozdělení platí

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{2B_1}{n_e B_0}\left(\frac{2\pi m_\mathrm{e} kT}{h^2}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\chi_i/kT},$$

kde N_1 je koncentrace iontu, N_0 neutrálního atomu, B_1 a B_0 jsou příslušné rozdělovací funkce a χ_i ionizační potenciál. Celková koncentrace atomů vodíku $N = N_1 + N_0$. Pro získání hodnot v grafu je možné použít následující program:

```
program sahav;

var tep,nel,x:double;
    i:integer;

function saha(tep,nel:double):double;

const em=9.10956e-31;   {hmotnost elektronu}
      bolk=1.38054e-23; {Boltzmannova konstanta}
      h=6.6256e-34;     {Planckova konstanta}
      exc=13.598;       {excitacni energie H v eV}
      enab=1.6022e-19;  {naboj elektronu}

var b1,b2,x:double;

begin
 b1:=2.0;
 b2:=1.0;
 x:=2.0*pi*em*bolk*tep/h/h;
 saha:=2.0*b2*sqrt(x)*x*exp(-exc*enab/bolk/tep)/nel/b1;
end;

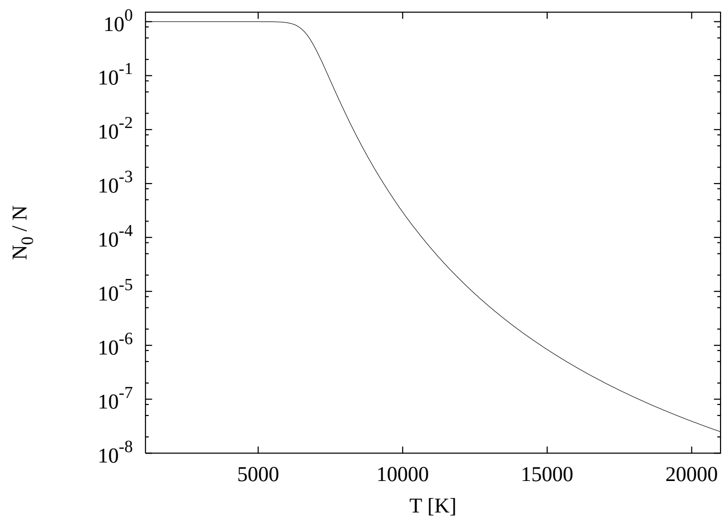
begin
 tep:=1000;
 nel:=1.0e17;
 for i:=1 to 200 do
 begin
  tep:=tep+100.0;
  x:=saha(tep,nel);
  writeln(tep,1.0/(1.0+x));
 end;
end.
```

Výsledný graf je na obrázku 7.

Úloha 14.15 Nakreslete graf závislosti poměru koncentrace vodíku s elektronem, nacházejícím se na druhé energetické hladině k celkové koncentraci vodíku v závislosti na teplotě za předpokladu termodynamické rovnováhy. Pro zjednodušení předpokládejte, že koncentrace elektronů je $n_e = 10^{20}\mathrm{m}^{-3}$. Vysvětlete tvar získaného grafu. Jaký závěr lze učinit pro čáry Balmerovy série vodíku?

Řešení: Využijeme výsledku předcházejícího příkladu (14.14) pro výpočet relativního zastoupení neutrálního vodíku. Pro výpočet podílu koncentrace vodíku na druhé hladině k celkovému množství neutrálního vodíku využijeme Boltzmannovy rovnice

$$\frac{N_B}{N_A} = \frac{g_B}{g_A}\mathrm{e}^{-\chi_{AB}/kT},$$



Obrázek 7: Graf závislosti relativní koncentrace atomů HI na teplotě.

kde N_B a je koncentrace atomu vodíku na druhé hladině a N_A celková koncentrace neutrálního vodíku, g_B a g_A jejich statistické váhy, χ_{AB} excitační energie.

Pro získání grafu na obrázku 8 je možné použít následující program,

```
program sahav2;

const em=9.10956e-31;   {hmotnost elektronu}
      bolk=1.38054e-23; {Boltzmannova konstanta}
      h=6.6256e-34;     {Planckova konstanta}
      exc=13.598;       {excitacni energie H v~eV}
      enab=1.6022e-19;  {naboj elektronu}

var tep,nel,x,n,gh,g2,x2:double;
    i:integer;

function saha(tep,nel:double):double;

const em=9.10956e-31;   {hmotnost elektronu}
      bolk=1.38054e-23; {Boltzmannova konstanta}
      h=6.6256e-34;     {Planckova konstanta}
      exc=13.598;       {excitacni energie H v~eV}
      enab=1.6022e-19;  {naboj elektronu}

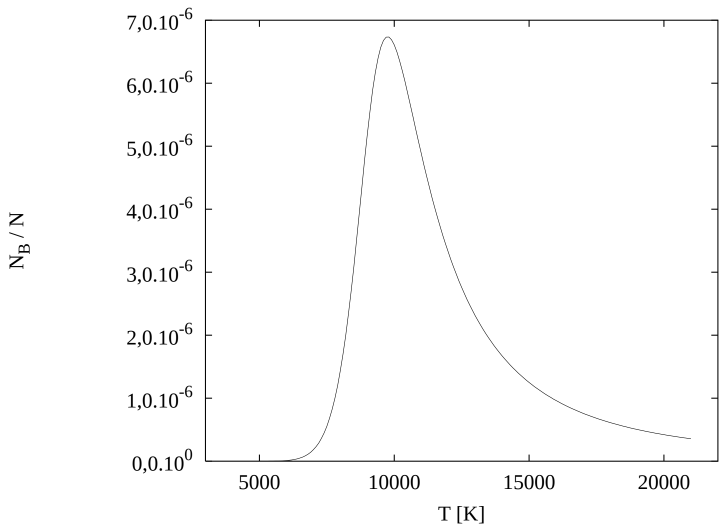
var g1,g2,x:double;

begin
 g1:=2.0;
 g2:=1.0;
 x:=2.0*pi*em*bolk*tep/h/h;
 saha:=2.0*g2*sqrt(x)*x*exp(-exc*enab/bolk/tep)/nel/g1;
```

```
end;

begin
 tep:=1000;
 nel:=1.0e20;
 gh:=2.0;
 n:=2.0;
 g2:=2.0*n*n;
 for i:=1 to 200 do
 begin
  tep:=tep+100.0;
  x:=saha(tep,nel);
  x2:=g2/gh*exp(-exc*enab/bolk/tep*(1.0-1.0/n/n));
  writeln(tep,x2/(1.0+x));
 end;
end.
```

ve kterém jsme využili funkci `saha` z předcházejícího příkladu.



Obrázek 8: Graf teplotní závislosti relativní koncentrace atomů vodíku na druhé energetické hladině na teplotě.

Tvar křivky je dán jednak tím, že s rostoucí teplotou roste podíl excitovaných atomů vodíku k atomům v základním stavu. Proto křivka pro nízké teploty zprvu roste. Pro vyšší teploty se začíná vodík ionizovat, ubývá celkového množství atomů vodíku v základním stavu a tedy i podíl atomů vodíku na druhé hladině klesá.

Balmerovy čáry vznikají přechody mezi hladinou s kvantovým číslem 2 a vyššími hladinami. Proto jsou za dané elektronové koncentrace nejvýraznější právě pro teplotu $T \cong 9800$K.

Úloha 14.16 Intenzita vycházející z izotermické vrstvy nacházející se v lokální termodynamické rovnováze je dána přesným řešením rovnice přenosu záření

$$I_\lambda = I_\lambda(0)\mathrm{e}^{-\tau_0} + \int_0^{\tau_0} B_\lambda(T(\tau))\mathrm{e}^{-(\tau-\tau_0)}\mathrm{d}\tau,$$

kde $I_\lambda(0)$ je dopadající intenzita záření v bodě s nulovou optickou hloubkou $\tau = 0$, τ_0 je optická hloubka vrstvy a $B_\lambda(T(\tau))$ Planckova funkce. V případě zmiňované izotermické vrstvy lze Planckovu funkci vytknout před integrál a provést integraci,

$$I_\lambda = I_\lambda(0)\mathrm{e}^{-\tau_0} + B_\lambda(T)(1 - \mathrm{e}^{-\tau_0})$$

Zvolte $B_\lambda(T) = 2B_0$ a nakreslete závislost vystupující intenzity na optické tloušťce vrstvy pro hodnoty dopadající intenzity záření $I_\lambda(0) = 0, 1B_0, 2B_0, 3B_0$. Diskutujte získané výsledky. Co platí pro opticky tenkou vrstvu ($\tau_0 \ll 1$) a pro opticky tlustou vrstvu ($\tau_0 \gg 1$)?

Řešení: Pro výpočet závislosti vystupující intenzity na tloušťce vrstvy je možné použít následující program:

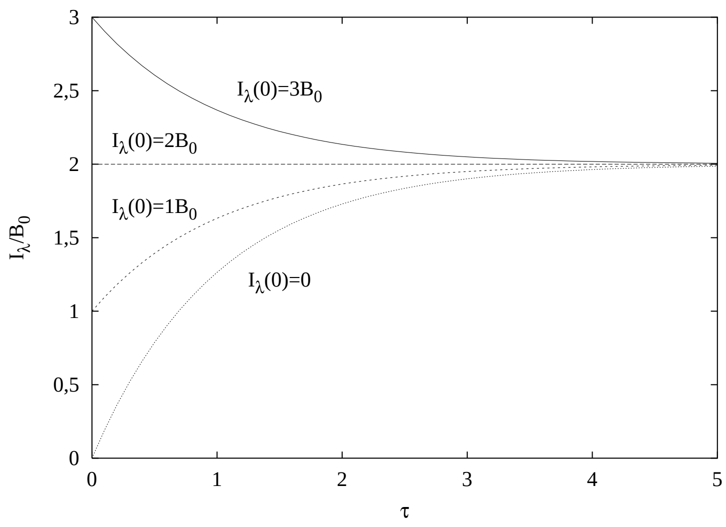
```
program izotv;

var i: integer;
    b,tau,int,i0: double;

begin
 b:=2.0;
 i0:=3.0;
 for i:=1 to 100 do
 begin
  tau:=(i-1)/10.0;
  int:=i0*exp(-tau)+b*(1.0-exp(-tau));
  writeln(tau,int);
 end;
end.
```

Nejprve diskutujme případ, kdy na vrstvu nedopadá žádné záření ($I_\lambda(0) = 0$, viz. obr. 9). Je patrné, že pro opticky tenké vrstvy je intenzita záření závislá na optické hloubce lineárně, pro rostoucí optické hloubky vrstvy se blíží k Planckově funkci. Obecně, pro libovolnou intenzitu dopadajícího záření platí, že intenzita vystupujícího záření pro případ opticky tenké vrstvy je přibližně rovna intenzitě dopadajícího záření. Příkladem opticky tenkých prostředí mohou být například některé hvězdné větry. Naopak, pro opticky tlustá prostředí intenzita vystupujícího záření se blíží Planckově funkci, nezávisí tedy na intenzitě dopadajícího záření a na optické hloubce vrstvy. Příkladem opticky tlustého prostředí může být sluneční atmosféra v čáře H_α.

Úloha 14.17 Předpokládejte, že nad povrchem hvězdy, který září jako černé těleso o teplotě $T_p = 5\,780\,\mathrm{K}$ se nachází vrstva s optickou hloubkou $\tau = 1$ ve stavu lokální termodynamické rovnováhy. V pozorované oblasti spektra hvězdy se nachází atomární čára, která má střed na



Obrázek 9: Závislost intenzity vyzářené vrstvou na její optické hloubce pro různé hodnoty dopadající intenzity.

vlnové délce $\lambda_0 = 500$nm. S využitím výsledku předcházejícího příkladu vypočtěte pozorovanou relativní intenzitu v závislosti na vlnové délce (vyjádřené v násobcích Dopplerovské šířky čáry $\Delta\lambda_D$) v případě, že teplota vrstvy je a) $T_v = 5\,000\,\mathrm{K}$, b) $T_v = 7\,000\,\mathrm{K}$, c) $T_v = T_p$. Přitom položte zdrojovou funkci $S(\lambda_0,T) = V(a,v)B(\lambda,T_v)$, kde $V(a,v)$ je tzv. Voigtova funkce s parametry $v = (\lambda - \lambda_0)/\Delta\lambda_D$ a parametrem a, charakterizujícím Lorentzovské rozšíření čáry (zvolte např. $a = 1$). Voigtovu funkci aproximujte vztahem $V(a,v) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\exp(-v^2) + \frac{a}{\sqrt{\pi}(v^2+a^2)}\right)$. Vysvětlete získané výsledky.

Řešení: Pro *intenzitu* záření černého tělesa je možné odvodit vztah

$$B(\lambda,T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

Se znalostí předcházejícího příkladu 14.16 je možné napsat následující program, který vypočítá záření emitované vrstvou:

```
program prof;

const a=1.0;
      tau0=1.0;
      ts=5780.0;
      tl=5000.0;
      lam0=5000.0e-10;

var i,j:integer;
    i0,u:double;

function voigt(v,agam:double):double; {Voigtova funkce}
 begin
  if(abs(v)>8.0) then
```

```
    voigt:=agam/sqrt(pi)/(agam*agam+v*v)/sqrt(pi)
   else
    voigt:=(exp(-v*v)+agam/sqrt(pi)/(agam*agam+v*v))/sqrt(pi);
 end;

function b(tep,lam:double):double;

const h=6.6256e-34;     {Planckova konstanta}
      c=2.99792e8;      {rychlost svetla}
      bolk=1.38054e-23; {Boltzmannova konstanta}

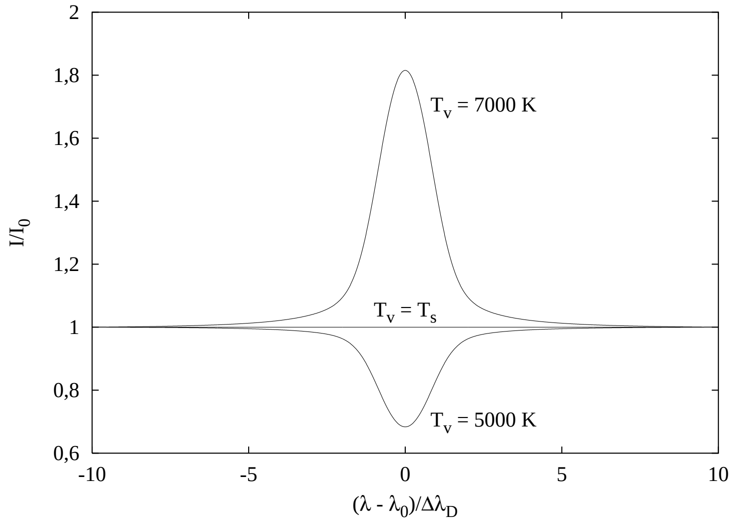
var lam5:double;

begin
 lam5:=lam*lam*lam*lam*lam;
 b:=2.0*h*c*c/lam5/(exp(h*c/lam/bolk/tep)-1.0);
end;

function profil(a,tau0,u:double):double;
var tau: double;
begin
 tau:=tau0*voigt(u,a);
 profil:=b(ts,lam0)*exp(-tau)+b(tl,lam0)*(1.0-exp(-tau));
end;

begin
 u:=-10.0;
 i0:=profil(a,tau0,u);
 for i:=0 to 2000 do
  begin
   u:=u+0.01;
   writeln(u,profil(a,tau0,u)/i0);
  end;
end.
```

Na obrázku 10 jsou nakresleny profily čar, získané uvedeným programem. Jednotlivým případům uvedeným v zadání se budeme věnovat podrobněji. Obecně však platí (viz. výsledek předcházejícího příkladu 14.16), že v centru čáry, kde je optická hloubka vrstvy vysoká, se pozorovaná intenzita blíží Planckově funkci s teplotou rovnou teplotě vrstvy. Naopak v křídlech čáry, kde je optická hloubka vrstvy nízká, se pozorovaná intenzita blíží Planckově funkci s teplotou rovnou teplotě dopadajícího záření. Tento poznatek je také klíčem k pochopení jednotlivých případů. V případě a), kdy je teplota vrstvy nižší než teplota dopadajícího záření, je také hodnota Planckovy funkce v centru čáry nižší, než hodnota Planckovy funkce dopadajícího záření a my pozorujeme absorpční čáry. Tento model je možné použít pro vysvětlení vzniku absorpčních čar např. ve viditelném spektru Slunce. Opačný jev nastává v případě b), kdy je teplota vrstvy vyšší než teplota dopadajícího záření. Tento model popisuje vznik emis-



Obrázek 10: Profily čar vyzařované vrstvou nacházející se v lokální termodynamické rovnováze pro různé teploty látky.

ních čar. V případě c), kdy je teplota vrstvy rovna teplotě dopadajícího záření se vrstva spolu s okolním zářením nachází ve stavu termodynamické rovnováhy a žádné čáry nepozorujeme.

Úloha 14.18 Pro situaci popsanou v předcházejícím příkladě nakreslete závislost ekvivalentní šířky čáry na optické hloubce čáry.

Řešení: Pro výpočet ekvivalentní šířky čáry v závislosti na její optické hloubce, je možné využít následující program:

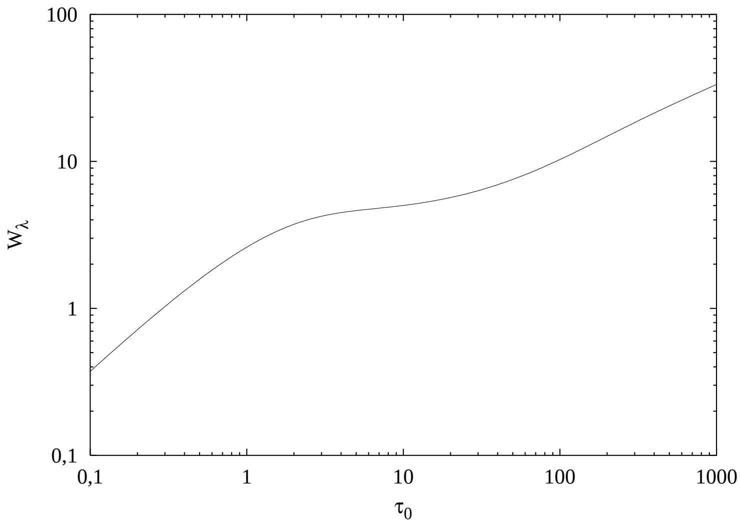
```
program krivrust;

const taumin=0.5;
      taumax=100.0;
      ntau=300;
      nlam=200;
      u0=-800.0;
      a=1.0;
      ts=5780.0;
      tl=5000.0;
      lam0=5000.0e-10;

var x,gam: double;
    i,j:integer;
    tau0,w,it,i0,u,dltau,dlam:double;

begin
 tau0:=taumin;
 dltau:=exp((ln(taumax)-ln(taumin))/(ntau-1));
 dlam:=2.0*abs(u0)/nlam;
 for j:=0 to ntau do
```

```
  begin
   u:=u0;
   i0:=profil(a,tau0,u);
   w:=0;
   for i:=0 to nlam do
    begin
     it:=(i0-profil(a,tau0,u))/i0;
     u:=u+dlam;
     if(i>0) and (i<nlam) then
       w:=w+it
     else
       w:=w+0.5*it;
   end;
   w:=w*dlam;
   writeln(tau0,' ',w);
   tau0:=tau0*dltau;
 end;
end.
```



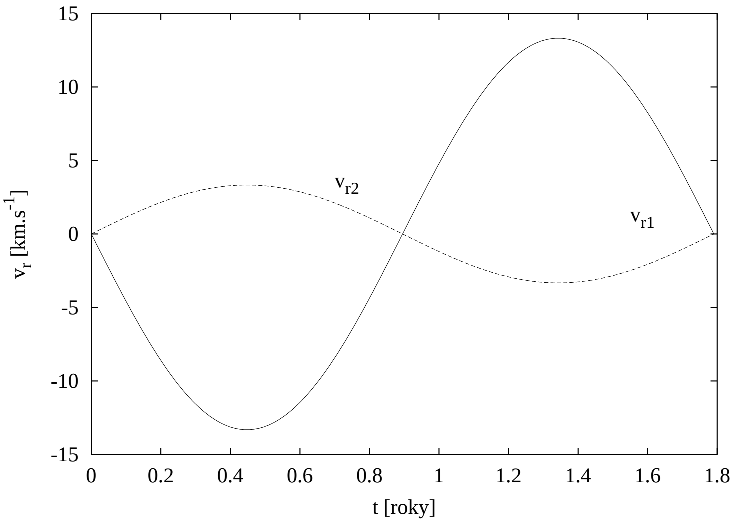
Obrázek 11: Závislost ekvivalentní šířky čáry na optické hloubce čáry.

Funkce `voigt`, `b` a `profil` zde nevypisujeme, všechny je možné převzít z předcházející úlohy 14.16. Graf, který byl získán uvedeným programem, je na obr. 11.

14.7 Dvojhvězdy

Úloha 14.19 Hvězdy s hmotnostmi $M_1 = 0{,}5\,M_\odot$ a $M_2 = 2{,}0\,M_\odot$ obíhají po kruhových drahách kolem společného hmotného středu. Součet poloos obou drah je $a = 2{\cdot}0\,\mathrm{AU}$, inklinační úhel $i = \pi/6$. Nakreslete křivku radiálních rychlostí.

Řešení: Vzájemná rychlost obou hvězd je dána vztahem $v^2 = G(M_1+M_2)/a$, pro radiální rychlost první hvězdy platí $v_{r1} = -\sin i \sin\theta\mu v/M_1$, kde θ je úhel mezi přímkou spojující hvězdy a směrem k pozorovateli. Pro vykreslení křivky radiálních rychlostí na obr. 12 lze použít následující program:



Obrázek 12: Křivka radiálních rychlostí

```
program radrych;

const au=1.496e11;
      ms=1.989e30;
      a=2.0*au;
      m1=0.5*ms;
      m2=2.0*ms;
      i=pi/6.0;
      ntheta=1000;
      g=6.67e-11;
      rok=60.0*60.0*24.0*365.0;

var si,theta,v,v1,v2,mu,p,t:double;
    j:integer;

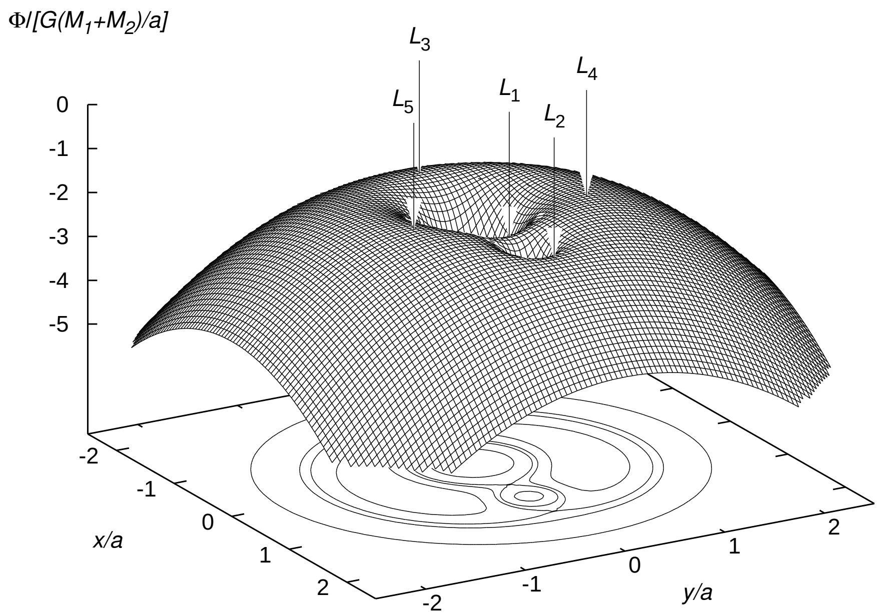
begin
 si:=sin(i);
 mu:=m1*m2/(m1+m2);
 p:=2.0*pi*sqrt(a*a*a/g/(m1+m2));
 for j:=0 to ntheta do
 begin
  theta:=2.0*pi*j/ntheta;
  v:=sqrt(g*(m1+m2)/a);
  v1:=-v*mu/m1*sin(theta)*si;
```

```
  v2:=v*mu/m2*sin(theta)*si;
  t:=j/ntheta*p/rok;
  writeln(t,' ',v1,' ',v2);
 end;
end.
```

Úloha 14.20 Nakreslete graf Rocheova potenciálu v rovině oběhu složek pro dvojhvězdu s hmotností složek $M_1 = 0{,}85\,M_\odot$, $M_2 = 0{,}17\,M_\odot$ se vzdáleností středů hvězd a. Na základě výsledků diskutujte povahu Lagrangeových bodů.

Řešení: Potenciál $\Phi = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} - \frac{s^2\omega^2}{2}$, kde s je vzdálenost od osy rotace, vyjádříme v bezrozměrných veličinách, $\frac{\Phi}{G(M_1+M_2)/a} = -\frac{M_1}{M_1+M_2}\frac{a}{r_1} - \frac{M_2}{M_1+M_2}\frac{a}{r_2} - \frac{1}{2}\frac{s^2}{a^2}$. Pro vykreslení můžeme například v programu Gnuplot použít následující skript:

```
m1=0.85
m2=0.17
x1=m2/(m1+m2)
x2=m1/(m1+m2)
mcos(a,b)=a/b
r1(x,y)=(x1*x1+x*x+y*y+2*x1*(x*x+y*y)**0.5*mcos(x,(x*x+y*y)**0.5))**0.5
r2(x,y)=(x2*x2+x*x+y*y-2*x2*(x*x+y*y)**0.5*mcos(x,(x*x+y*y)**0.5))**0.5
splot -(m1/r1(x,y)+m2/r2(x,y)+0.5*(m1+m2)*(x*x+y*y))/(m1+m2)
```



Obrázek 13: Průběh potenciální energie v okolí dvojhvězdy, znázorněný ve vztažné soustavě korotující s dvojhvězdou.

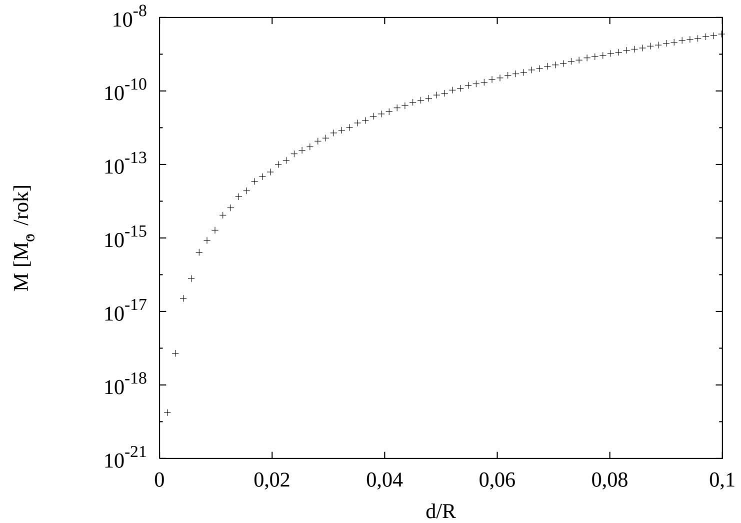
Výsledek je na obrázku 13. Lagrangeovy body L_1, L_2 a L_3 jsou sedlovými body potenciálu, v Lagrangeových bodech L_4 a L_5 dosahuje potenciál svého maxima.

Úloha 14.21 V případě, že v dvojhvězdě přetéká hmota, je možné rychlost přenosu odhadnout vztahem $\dot{M} = \rho v A$, kde ρ je hustota látky která přetéká z hvězdy o poloměru R na druhou hvězdu průřezem o ploše A. Odhadneme-li plochu jako $A \cong \pi R d$, kde d je tloušťka vrstvy, která přesahuje Rocheovu plochu a rychlost v položíme rovnu tepelné rychlosti, pak rychlost přenosu hmoty je možné odhadnout

$$\dot{M} \cong \pi R d \rho \left(\frac{3kT}{m_{\mathrm{H}}} \right)^{1/2},$$

kde k je Boltzmannova konstanta, T je teplota a m_{H} je hmotnost atomu vodíku. Pomocí programu STATSTAR vypočtěte závislost $\dot{M}$ na d pro hvězdu o sluneční hmotnosti (viz. příklad 14.8).

Řešení: Pro výpočet závislosti rychlosti přenosu hmoty $\dot{M}$ na tloušťce vrstvy hvězdy, která přesahuje Rocheovu plochu, je možné použít následující program, který načítá model atmosféry (bez hlavičky) vypočtený programem STATSTAR:



Obrázek 14: Rychlost přenosu hmoty ve dvojhvězdě

```
program phmot;

const rhv=7.11e8;        {polomer hvezdy}
      rcgs=0.01;         {prepocet CGS}
      rhocgs=1000.0;     {prepocet CGS}
      ms=1.989e30;       {hmotnost Slunce}
      bolk=1.38054e-23;  {Boltzmannova konstanta}
      mh=1.6735e-27;     {hmotnost atomu vodiku}
```

```
var dm,r,qm,lr,t,p,rho: double;
    i: integer;

begin
 for i:=1 to 424 do
 begin
  readln(r,qm,lr,t,p,rho);
  dm:=pi*rhv*(rhv-r*rcgs)*rho*rhocgs*sqrt(3.0*bolk*t/mh);
  writeln(1.0-r*rcgs/rhv,dm/ms);
 end;
end.
```

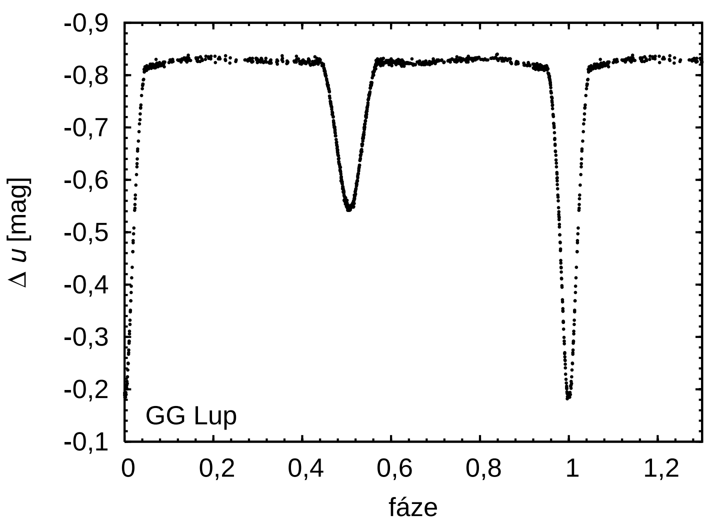
14.8 Proměnné hvězdy

Úloha 14.22 Zjistěte periodu hvězdy CQ UMa.

Řešení: Na adrese `http://adsabs.harvard.edu` zvolíme "Search", "Astronomy and Astrophysics Search" a jako "Object name" zadáme "CQ UMa". Zvolíme hledání, "Send Query". Podle názvu zvolíme článek, který se týká hledání periody, získáme jeho pdf verzi a vyhledáme určenou periodu. Například v článku *Improvement of the Period of CQ UMa* autorů Jozefa Žižňovského a Zdeňka Mikuláška (*IBVS*, číslo 4259, strana 1) nalezneme periodu 2,4499141 ± 0,0000038 dne.

Úloha 14.23 Nakreslete světelnou křivku zákrytové dvojhvězdy GG Lup.

Řešení: Na adrese `http://cds.u-strasbg.fr` zvolíme "Catalogs", zadáme hledání "GG Lup" a zvolíme článek Clausen a kol. 1993, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* 101, 563 (například volba FTP). Získáme soubor `table1`, pomocí něhož nakreslíme světelnou křivku.



Obrázek 15: Světelná křivka zákrytové dvojhvězdy GG Lup

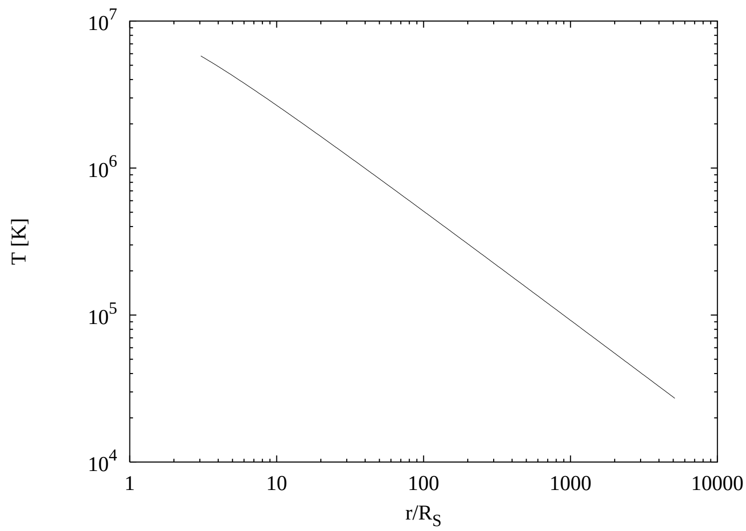
14.9 Pozdní stadia vývoje hvězd, novy, supernovy

Úloha 14.24 Pro teplotu akrečního disku platí vztah

$$T = \left(\frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma R_S^3}\right)^{1/4} \left(\frac{R_S}{r}\right)^{3/4} \left[1 - \left(\frac{R_S}{r}\right)^{1/2}\right]^{1/4} .$$

Nakreslete průběh teploty v disku a pomocí Wienova zákona vlnovou délku, na které plyn vyzáří nejvíce energie pro černou díru A0620-00, která je složkou dvojhvězdy, s hmotností 3,82 $M_\odot$. Ve vztahu $R_S = 2GM/c^2$ je Schwarzschildův poloměr, σ konstanta Stefanova-Boltzmannova zákona. Graf nakreslete pro poloměr $r > 3R_S$, nad kterým v případě nerotující černé díry existují stabilní dráhy hmotných částic.

Řešení: Pro získání grafů 16 a 17 je možné použít následující program:



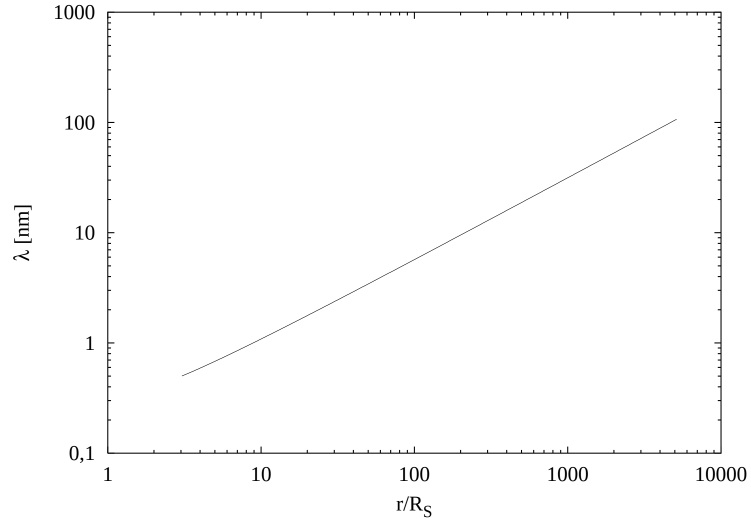
Obrázek 16: Průběh teploty v akrečním disku

```
program disk;

const ms=1.989e30;      {hmotnost Slunce}
      m=3.82*ms;

      g=6.67e-11;       {gravitacni konstanta}
      dmdt=1.0d14;
      sig=5.67051d-8;   {konstanta Stefan-Boltzmannova zakona}
      c=2.99792e8;      {rychlost svetla}
      b=0.0029;         {konstanta Wienova zakona}

var rs,tdisk,r,dr,ddr,t,mlam: double;
    i: integer;
```



Obrázek 17: Vlnová délka získaná z Wienova posunovacího zákona

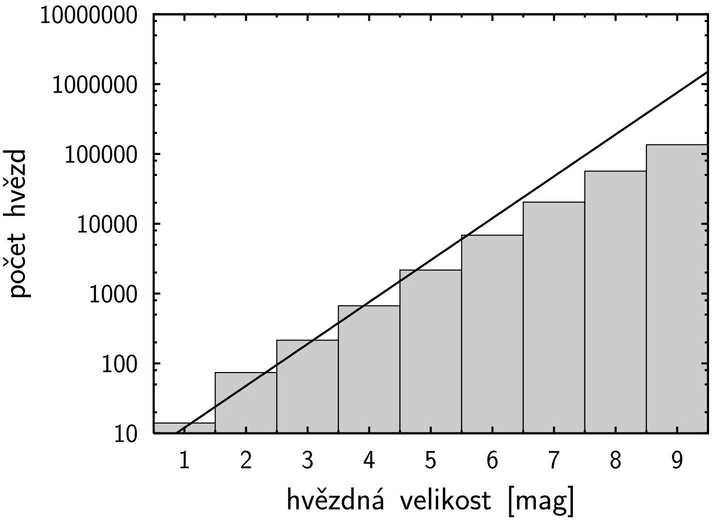
```
begin
 rs:=2.0*g*m/c/c;
 tdisk:=3.0*g*m*dmdt/8.0/pi/sig/rs/rs/rs;
 tdisk:=sqrt(sqrt(tdisk));
 r:=3.0*rs;
 for i:=1 to 500 do
 begin
  r:=1.015*r;
  dr:=sqrt(rs/r);
  ddr:=sqrt(dr);
  t:=tdisk*ddr*ddr*ddr*sqrt(sqrt(1.0-dr));
  mlam:=b/t;
  writeln(r/rs,t,mlam*1.0e9);
 end;
end.
```

14.10 Hvězdy a mezihvězdná látka

Úloha 14.25 S pomocí katalogu TYCHO nakreslete histogram počtu hvězd na obloze podle jejich pozorované hvězdné velikosti. Předpokládejte, že jsou hvězdy v prostoru rozloženy rovnoměrně a že všechny hvězdy mají stejnou hvězdnou velikost. Spočtěte za těchto předpokladů rozdělovací funkci hvězd podle jejich hvězdné velikosti a porovnejte se získaným histogramem. Co můžeme na základě těchto úvah usuzovat o mezihvězdné extinkci?

Řešení: Na stránce CDS `http://cdsweb.u-strasbg.fr/cats/Cats.htx`, na které je možné hledat astronomické katalogy, zadáme hledání "TYCHO". Zvolíme "I/197A Tycho Input Catalogue, Revised version (Egret+ 1992)", ("VizieR query form"). Pro úsporný výpis zvolíme "Maximum Entries per table" jako "unlimited", "Output layout" jako "tiny ascii" a

zaškrtneme výpis pouze položky "Vmag". Jako kritérium pro hledání zadáváme např. "4+/-0.5" (postupujeme např. po celých magnitudách). Na základě počtu nalezených hvězd získáme následující obrázek 18.



Obrázek 18: Histogram počtu hvězd podle jejich hvězdné velikosti. Přímka označuje počet hvězd spočtený za předpokladu, že je mezihvězdné zčervenání zanedbatelné.

Počet hvězd N v kouli o poloměru r je úměrný $N \sim r^3$. Vzdálenost, do které uvidíme hvězdy hvězdné velikosti m, které mají stejnou absolutní hvězdnou velikost M je dána vztahem $m - M = 5 \log r - 5$, kde r je vyjádřeno v parsecích. Počet hvězd je tedy úměrný $N \sim 10^{0,6(m-M+5)}$, počet hvězd s danou hvězdnou velikostí je úměrný $\mathrm{d}N/\mathrm{d}m \sim 10^{0,6m}$. Tato křivka je nakreslena nepřerušovanou čarou v obrázku 18. Slabých hvězd pozorujeme nápadně méně, než by to odpovídalo uvažovanému modelu, důvodem je vliv mezihvězdné extinkce.

14.11 Extragalaktická astronomie

Úloha 14.26 Určete zářivý výkon aktivní galaxie Cygnus A v rádiovém oboru pomocí zářivého toku uvedeného v tabulce, víte-li, že galaxie je vzdálena 250 Mpc.

$\log \nu$ [Hz]	$\log F_\nu$ $[\mathrm{J \cdot m^{-2} \cdot Hz^{-1}}]$	$\log \nu$ [Hz]	$\log F_\nu$ $[\mathrm{J \cdot m^{-2} \cdot Hz^{-1}}]$
7,0	−21,88	8,7	−22,38
7,3	−21,55	9,0	−22,63
7,7	−21,67	9,3	−22,96
8,0	−21,66	9,7	−23,43
8,3	−22,09	10,0	−23,79

Řešení: Abychom získali zářivý výkon v radiovém oboru, musíme integrovat zářivý tok přes všechny frekvence a sečíst tok na kouli o poloměru 250 Mpc. S použitím lichoběžníkového pravidla je možné napsat následující program:

```
program agn;

const nf=10;
      d=250.0;
      mpc=3.09e22;

var nu,nus,f,fs,lr,r: double;
    i: integer;

function des(x: double) : double;
begin
 des:=exp(x*ln(10.0));
end;

begin
 lr:=0.0;
 for i:=1 to nf do
 begin
  read(nu,f);
  nu:=des(nu);
  f:=des(f);
  if(i > 0) then lr:=lr+0.5*(fs+f)*(nu-nus);
  fs:=f;
  nus:=nu;
 end;
 r:=d*mpc;
 lr:=4.0*pi*r*r*lr;
 writeln(lr);
end.
```

Zářivý výkon galaxie Cygnus A v rádiovém oboru je $9\,10^{37}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, což je o šest řádů více, než je zářivý výkon galaxie M31 v rádiové oblasti a asi desetkrát více než zářivý výkon naší Galaxie ve *všech* oborech elektromagnetického spektra.

Úloha 14.27 Nalezněte článek autorů Penziase a Wilsona, za který jim byla udělena Nobelova cena.

Řešení: Na adrese `http://adsabs.harvard.edu` zvolíme "Search", "Astronomy and Astrophysics Search" a jako autory (na každý řádek jednoho) napíšeme Penzias a Wilson, zaškrtněte AND, klepneme na "Send Query". Hledaným článkem je *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s* (*Astrophysical Journal*, číslo 142, strana 419). Kliknutím na odkaz vybraného článku pak získáte jeho abstrakt, je možné získat přímo samotný článek.

Úloha 14.28 Pomocí vzáleností galaxií a jejich radiálních galaxií uvedených v článku W. A. Freedman a kol., *Astrophysical Journal*, číslo 553, strana 47, spočtěte hodnotu Hubbleovy konstanty.

Řešení: Článek získáme například na adrese `http://adsabs.harvard.edu`. Z tabulky 4 tohoto článku převezmeme vzdálenosti galaxií D_Z, z tabulky 5 jejich radiální rychlosti (V_{Shapley}). Získanými daty proložíme přímku a spočteme hodnotu Hubbleovy konstanty $H = 77 \pm 4\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{Mpc}^{-1}$

15 Astronomické a fyzikální konstanty, převody a zákony

Většina konstant je zaokrouhlena na 3 platná místa.
Základní charakteristiky Slunce:

Hmotnost $M_\odot$	$1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Poloměr $R_\odot$	$6{,}96 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
Zářivý výkon $L_\odot$	$3{,}86 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$
M_{bol}	$4{,}75\,\mathrm{mag}$
m_{bol}	$-26{,}85\,\mathrm{mag}$
Solární konstanta K	$1{,}37 \cdot 10^{3}\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$
Střední vzdálenost od Země AU	$1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

$1\,\mathrm{pc} = 3{,}086 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$
$1\,\mathrm{rad} = 206\,265''$
$1\,\mathrm{rok} = 3{,}156 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s}$
$1\,\mathrm{Jy} = 10^{-26}\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{Hz}^{-1}$

Zářivý výkon hvězdy $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{ef}}^4$.

Vztah hmotnost – zářivý výkon pro hvězdy HP $L \sim \dfrac{\mu^4}{\kappa} M^3$.

Rovnice hydrostatické rovnováhy $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -G\dfrac{M\rho}{r^2}$.

Teplotní gradient při přenosu zářením $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{3\kappa L_r}{64\pi\sigma r^2 T^3}\rho$.

Podmínka konvekce $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} > \dfrac{\gamma - 1}{\gamma}\dfrac{T}{P}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}$.

Eddingtonova limita zářivého výkonu $L_{\mathrm{Ed}} = \dfrac{4\pi c G M}{\kappa}$.

Optická hloubka $\tau_\lambda = \displaystyle\int_0^s \kappa_{\lambda_1}\rho \mathrm{d}s$.

III. Keplerův zákon $\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{G}{4\pi^2}(M_1 + M_2)$.

Změna oběžné doby při přenosu hmoty u dvojhvězd $\dfrac{1}{T}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 3\dfrac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t}\dfrac{M_1 - M_2}{M_1 M_2}$.

Zářivý výkon kosmického tělesa při akreci hmoty $L \cong G\dfrac{M}{R}\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$.

Maximální hodnota teploty disku při akreci $T_{\max} = 0{,}488\left(\dfrac{3GM\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}}{8\pi\sigma R^3}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Gravitační rudý posuv $z = \dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{GM}{c^2 R}$.

Podmínka degenerace $K_1\rho^{\frac{5}{3}} \geq \dfrac{A\rho T}{\mu}$.

Zářivý výkon pulsaru $L = \dfrac{8}{5}\pi^2 M R^2 P^{-3}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$.

Disperzní míra $DM = \int_0^d n_{\mathrm{e}} \mathrm{d}l$.

Jeansova kritická hmotnost $M_J \cong \left(\frac{5kT}{G\mu m_{\mathrm{H}}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4\pi\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Poloměr Strömgrenovy oblasti $r_S \cong \left(\frac{3N_f}{4\pi\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} n_{\mathrm{H}}^{-\frac{2}{3}}$.

Relativistická rychlost vzdalování $v = c\frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$.

Kritická hodnota hustoty $\rho_k = \frac{3}{8}\frac{H^2}{\pi G}$.

Hubbleův zákon $v = Hr$.

Fyzikální konstanty a zákony:

Wienův posunovací zákon $\lambda_{\max}T = b$.

Energetické hladiny atomu vodíku $E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}$.

Spektrální rozlišovací schopnost $R = mN = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$.

Šířka spektrální čáry při teplotním rozšíření $\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}}$.

Tlak plynu a tlak záření $P_g = \frac{\mathscr{R}}{\mu}\rho T$, $P_r = \frac{4\sigma}{3c}T^4$.

Boltzmannova rovnice $\log\frac{N_B}{N_A} = -\frac{5040}{T}\chi_{AB} + \log\frac{g_B}{g_A}$.

Sahova rovnice $\log\frac{N_1}{N_0} = \frac{5}{2}\log T - \frac{5040}{T}\chi_i - \log P_e + \log\frac{2B_{r+1}(T)}{B_r(T)} - 1{,}48$.

Gravitační potenciální energie sférického tělesa $E_p = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}$.

Viriálová věta pro gravitačně vázané soustavy $2\langle E_k\rangle + \langle E_p\rangle = 0$.

Planckova konst. $h = 6{,}63\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}$
Rychlost světla ve vakuu $c = 2{,}99\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
Gravitační konst. $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$
Boltzmannova konst. $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$
Stefanova-Boltzmannova konst. $\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$
Konstanta Wienova posunavacího zákona $b = 2{,}89\cdot 10^{-3}\mathrm{m\cdot K}$
Plynová konstanta $\mathscr{R} = 8{,}31\cdot 10^{3}\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$

Hmotnost elektronu $m_\mathrm{e} = 9{,}11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Hmotnost protonu $m_\mathrm{p} = 1{,}67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Hmotnost neutronu $m_\mathrm{n} = 1{,}67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Atomová hmotnostní jednotka $u = 1{,}66\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Hubbleova konstanta $H = 75\,\mathrm{km\cdot s^{-1}\cdot Mpc^{-1}}$

$1\,\mathrm{eV} = 1{,}60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$
$1\,\mathrm{eV} = 1{,}60\cdot 10^{-12}\,\mathrm{erg}$
$1\,\mathrm{Pa} = 10\,\mathrm{dyn\cdot cm^{-2}}$
$m_\mathrm{H} = 1{,}67352\cdot 10^{-24}\,\mathrm{g}$
$\sigma_T = 6{,}6524\cdot 10^{-25}\,\mathrm{cm^{-2}}$

Literatura

[1] Böhm – Vitense, E.: Introduction to Stellar Astrophysics. Cambridge University Press, Cambridge 1992.

[2] Bowers, R., Deeming, T.: Astrophysics I – Stars, II – Interstellar Matter and Galaxies. Jones and Bartlett Publishers. Boston 1984.

[3] Bradt, H.: Astronomy Methods. Cambridge University Press, Cambridge 2009.

[4] Carroll, B. W., Ostlie, D. A.: An Introduction to Modern Astrophysics. Addison – Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, 1996.

[5] Cox, A. N.: Allen's Astrophysical Quantities. Springer Verlag, New York 2000.

[6] Dagaev, M. M.: Sbornik zadač po astrononomii. Prosvěščenije, Moskva 1980.

[7] Gray, D. F.: The Observation and Analysis of Stellar Photospheres. John Wiley and Sons, London 1993.

[8] Harwit, M.: Astrophysical Concepts. Springer, New York 1998.

[9] Hilditch, R. W.: An Introduction to Close Binary Stars. Cambridge University Press, Cambridge 2001.

[10] Ivanov, V. V, Krivov, A. V., Denisenkov, P. A.: The Paradoxical Universe. Peterburg 1998.

[11] Kozel, S. M., Rašba, E. I., Slavatinskij, S. A.: Sbornik zadač po fizike. Nauka, Moskva 1987.

[12] Kutner, M. L.: Astronomy: A Physical Perspective. Cambridge University Press, Cambridge 2009.

[13] Lang, K. R.: Astrophysical Formulae. Springer Verlag, Berlin 1974.

[14] Le Blanc, F.: An Introduction to Stellar Astrophysics. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester 2010.

[15] Martynov, D. J., Lipunov, V.M.: Sbornik zadač po astrofizike. Nauka, Moskva 1986.

[16] Mikulášek, Z.: Sbírka úloh z fyziky hvězd. `http://www.hvezdarna.cz`

[17] Murray, C. D., Dermott, S. F.: Solar System Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge 2009.

[18] Phillips, A.C.: The Physics of Stars. John Wiley & Sons, New York 1999.

[19] Prialnik, D.: An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution. Cambridge University Press, Cambridge 2000.

[20] Rutten, R. J.: Radiative Transfer in Stellar Atmospheres. Sterrekunding Instituut, Utrecht 1999.

[21] Schrijver, H.: The Hipparcos and Tycho Catalogues. Volume 5 – 11. ESA Publications Division, Noordwijk 1997.

[22] Sobolev, V.V.: Kurs tĕoretičeskoj astrofiziki. Nauka, Moskva 1985.

[23] Swihart, T. L.: Basic Physics of Stellar Atmospheres. Pachart Publishing House, Tuscon 1971.

[24] Unsöld, A., Baschek, B.: The New Cosmos, Springer Verlag, Berlin 2001.

[25] Zeilik, M., Gregory, S. A.: Introductory Astronomy and Astrophysics. Sanders College Publishing, Fort Worth 1998.

[26] Zombeck, M. V.: Handbook of Space Astronomy and Astrophysics. Cambridge University Press, Cambridge 1990. `http://ads.harvard.edu/books/hsaa/`

[27] `www.jyu.fi/ipho`

[28] `www.issp.ac.ru/iao/russia/2004/agr04.html`